

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Convergence of differential-difference schemes of high order of accuracy is proved in this article using logarithmic norm of the matrix. Logarithmic matrix norms are well known in the theory of ordinary differential equations where they supply estimates for error growth. Evaluation of inaccuracy of these schemes for partial differential equations of parabolic type is shown.

Построение схем повышенного порядка аппроксимации с использованием метода моментов и специального интерполирования в приграничных узлах проведено в работах [1, 2]. Здесь на примере семислойных схем докажем сходимость и приведем оценки погрешности этого метода для случая параболического уравнения. Исследование сходимости будем проводить с помощью логарифмической нормы, впервые представленной Лозинским [3] и Далквистом [4]. Семислойные схемы будут иметь три параметра, область изменения которых определится условиями аппроксимации и сходимости. В основе данной статьи - работа [5], в которой исследована сходимость схем повышенной точности метода интегральных соотношений.

Пусть требуется найти решение следующей краевой задачи:

$$a(t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(t)u + f(x, t) \quad (0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(1, t) = \psi_2(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2)$$

где $a(t) > 0$.

Задачу (1), (2) на прямых $x = x_n = nh$ ($h > 0$; $n = \overline{1, N-1}$; $x_0 = 0$, $x_N = 1$) мы свели приближенно к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$a(t)h^2 \left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right] U' = \left[\sum_{m=1}^3 H_2^m Q^m \right] U - c(t)h^2 \left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right] U + F, \quad (3)$$

$$U(0) = \Phi. \quad (4)$$

Здесь $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T$ - вектор-столбец решения, $u_n = u_n(t) \approx u(x_n, t)$ ($0 \leq t \leq T$; $n = \overline{1, N-1}$); матрица $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1}$, $q_{ii} = -2$, $q_{ij} = 1$ для $|i-j|=1$, $q_{ij} = 0$ для $|i-j| > 1$; Φ и F - известные N -мерные вектор-функции;

$$A_2^0 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \quad A_2^1 = \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1 + 50\alpha_2),$$

$$A_2^2 = \frac{1}{240}(-\alpha_0 + 18\alpha_1 + 318\alpha_2), \quad A_2^3 = \frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1 + 4094\alpha_2);$$

$$H_2^1 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \quad H_2^2 = \alpha_1 + 4\alpha_2, \quad H_2^3 = \alpha_2;$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - числовые параметры.

Для погрешности метода $\gamma_n = \gamma_n(t) = u(x_n, t) - u_n(t)$ в силу линейности нашей задачи получим следующую задачу Коши:

$$a(t)h^2 \left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right] \Gamma' = \left[\sum_{m=1}^3 H_2^m Q^m \right] \Gamma - c(t)h^2 \left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right] \Gamma + R, \quad (5)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad \Gamma(0) = 0,$$

где $\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}]^T$; $R = [r_1, r_2, \dots, r_{N-1}]^T$;

$$r_i = \frac{1}{10!} (-289\alpha_0 + 1282\alpha_1 - 8258\alpha_2) h^{10} \frac{\partial^9 u(x_i, t)}{\partial x^8 \partial t} +$$

$$+ \frac{1}{12!} (-6059\alpha_0 + 31574\alpha_1 - 257110\alpha_2) h^{12} \frac{\partial^{11} u(x_i, t)}{\partial x^{10} \partial t} + O(h^{14}) = \quad (6)$$

$$= h^{10} z_i(t) + h^{12} v_i(t) + O(h^{14}), \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$z_i(t) = \frac{1}{10!} (-289\alpha_0 + 1282\alpha_1 - 8258\alpha_2) \frac{\partial^9 u(x_i, t)}{\partial x^8 \partial t};$$

$$v_i(t) = \frac{1}{12!} (-6059\alpha_0 + 31574\alpha_1 - 257110\alpha_2) \frac{\partial^{11} u(x_i, t)}{\partial x^{10} \partial t}.$$

С помощью преобразующей матрицы [6]

$$B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi ij}{N} \right\}_{i,j=1}^{N-1}, \quad B = B^{-1} = B^*,$$

составленной из собственных векторов матрицы Q , получим следующее представление:

$$\left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right]^{-1} = B \left[\delta_{ij} / \sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_i^m \right] B^{-1},$$

где $\left[\delta_{ij} / \sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_i^m \right]$ - диагональная матрица, $\mu_i = -2 + 2 \cos \frac{\pi i}{N}$ ($i = \overline{1, N-1}$) - собственные числа матрицы Q , δ_{ij} - символ Кронекера.

Умножив матричное уравнение (5) на матрицу $\frac{1}{h^2 a(t)} \left[\sum_{m=0}^3 A_2^m Q^m \right]^{-1}$ слева, перейдем к равносильной задаче:

$$\Gamma' = \frac{1}{h^2 a(t)} B \left[\frac{\sum_{m=1}^3 H_2^m \mu_i^m}{\sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_j^m} \delta_{ij} \right] B^{-1} \Gamma - \frac{c(t)}{a(t)} \Gamma + \frac{1}{h^2 a(t)} B \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_j^m} \right] B^{-1} R \quad (0 \leq t \leq T), \quad (7)$$

$$\Gamma(0) = 0. \quad (8)$$

Потребуем теперь, чтобы матрица

$$B \left[\frac{\sum_{m=1}^3 H_2^m \mu_i^m}{\sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_j^m} \delta_{ij} \right] B^{-1} \quad (9)$$

была отрицательно определенной. Это требование налагает условия на область изменения параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Вводя обозначения $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$, приходим к следующей совокупности неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > 0, \\ -\frac{4288 - 9568 \cdot \beta_1}{16640} < \beta_2 < \frac{4288 - 9568 \cdot \beta_1}{12116} \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \leq 0, \\ -\frac{4288 + 15120 \cdot \beta_1}{16640} < \beta_2 < \frac{4288 + 15120 \cdot \beta_1}{12116} \end{array} \right. \quad (10)$$

Исследуем сходимость задачи (3), (4). Для этого используем логарифмическую норму матрицы [3, 4]. Концепция логарифмической нормы матрицы широко используется в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для оценки решений систем ОДУ первого порядка.

Для квадратной матрицы A логарифмическая норма определяется следующим образом:

$$\mu[A] = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\|E + \tau A\| - 1}{\tau}.$$

С помощью леммы Лозинского [3] оценим по норме (будем рассматривать III норму) решение задачи (7), (8):

$$\|\Gamma\| \leq \int_0^t \|R^*\| \exp\left(\int_\tau^t \mu[A] d\xi\right) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (11)$$

где $\|\Gamma\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n^2}$;

$$\|R^*\| = \frac{1}{h^2 a(t)} \left\| B \left[\delta_{ij} / \sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_i^m \right] B^{-1} R \right\| \leq \frac{1}{h^2 a(t)} d(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} r_n^2};$$

$$d(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| 1 / \sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_i^m \right| = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{7560}{s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \right|;$$

$$s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = 6143\alpha_0 - 62\alpha_1 - 11906\alpha_2 + (1605\alpha_0 + 12534\alpha_1 - 4854\alpha_2) \cos \frac{\pi i}{N} + \\ + (2838\alpha_1 - 219\alpha_0 + 27786\alpha_2) \cos^2 \frac{\pi i}{N} + (31\alpha_0 - 190\alpha_1 + 4094\alpha_2) \cos^3 \frac{\pi i}{N};$$

$$A = \frac{1}{h^2 a(t)} B \left[\frac{\sum_{m=1}^3 H_2^m \mu_i^m}{\sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_j^m} \delta_{ij} \right] B^{-1} - \frac{c(t)}{a(t)} E, \text{ где } E - \text{ единичная матрица.}$$

Логарифмическая норма $\mu[A]$, соответствующая III матричной норме

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\text{наибольшее собственное значение матрицы } A^* A},$$

равна наибольшему собственному значению матрицы $(A + A^*)/2$. В нашем случае

$$\mu[A] = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\frac{\sum_{m=1}^3 H_2^m \mu_i^m}{h^2 a(t) \sum_{m=0}^3 A_2^m \mu_i^m} - \frac{c(t)}{a(t)} \right) = \frac{15120}{a(t)} \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\frac{-1 + \cos \frac{\pi i}{N}}{h^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\alpha_0 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 \cos \frac{\pi i}{N} + 4\alpha_2 \cos^2 \frac{\pi i}{N}}{s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \right) - \frac{c(t)}{a(t)}.$$

Поскольку матрица (9) отрицательно определена, то для нормы $\mu[A]$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\mu[A] &\leq \frac{15120}{a(t)} \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\frac{-1 + \cos \frac{\pi i}{N}}{h^2} \right) q(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) - \frac{c(t)}{a(t)} = \\ &= -\frac{30240}{a(t)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2N}}{h^2} q(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) - \frac{c(t)}{a(t)}.\end{aligned}$$

Здесь $q(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \min_{1 \leq i \leq N-1} \left(\frac{\alpha_0 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 \cos \frac{\pi i}{N} + 4\alpha_2 \cos^2 \frac{\pi i}{N}}{s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \right) > 0$.

Заметим, что $0 < \cos \frac{\pi}{2N} < \frac{2N}{\pi} \sin \frac{\pi}{2N}$ для $N \geq 2$, поэтому

$$\mu[A] < -\frac{7560\pi^2}{a(t)} q(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \cos^2 \frac{\pi}{2N} - \frac{c(t)}{a(t)} = \mu(t) \leq \mu^*.$$

Из неравенства (11) для погрешности метода выведем следующую оценку:

$$|\gamma_n(t)| \leq \|\Gamma\| \leq h^{7.5} \frac{d(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{a} z t e^{\mu^* t} \quad (0 \leq t \leq T; \quad n = \overline{1, N-1}),$$

где $z = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |z_i(t)| \right)$, $a = \min_{0 \leq t \leq T} a(t)$.

Полученная оценка погрешности показывает, что решение задачи (3), (4) при $h \rightarrow 0$ равномерно со скоростью порядка $h^{7.5}$ сходится к решению задачи (1), (2).

Для $c(t) \geq 0$ область интегрирования может быть неограниченной $(0 \leq t \leq \infty, 0 \leq x \leq 1)$ в предположении, что $\frac{\partial^9 u(x_i, t)}{\partial x^8 \partial t}$, $\frac{\partial^{11} u(x_i, t)}{\partial x^{10} \partial t}$ ограничены в этой области. Оценка погрешности в этом случае будет иметь вид

$$|\gamma_n(t)| \leq h^{7.5} \frac{d(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{a} z \frac{1 - e^{\mu^* t}}{-\mu^*}.$$

Заметим, что, выбирая параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ исходя из условий

$$\begin{cases} -289\alpha_0 + 1282\alpha_1 - 8258\alpha_2 = 0, \\ -6059\alpha_0 + 31574\alpha_1 - 257110\alpha_2 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

мы обнулим главные члены остатков r_i , $i = \overline{1, N-1}$, (6) и повысим скорость сходимости задачи (3), (4) до порядка $h^{11.5}$. Параметры α_i , $i = \overline{0, 2}$, удовлетворяющие условиям (12), лежат в области, задаваемой неравенствами (10).

1. Самусенко А. В., Огрызко С. В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2006. № 2.
2. Огрызко С. В. // IX Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Беларуси (НИРС-2004), Минск, 26 апр. 2004 г. Мн., 2006. С. 142.
3. Лозинский С. М. // Изв. вузов СССР. Математика. 1958. № 5. С. 52.
4. Dahlquist G. // Trans. Royal Inst. Tech. Stockholm, 1959. № 130.
5. Самусенко А. В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1970. № 2. С. 3.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.

Поступила в редакцию 11.11.06.

Светлана Валерьевна Фролова - аспирант кафедры вычислительной математики. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики А.В. Самусенко.