

ПОВЕРХНОСТИ ОБРАТНЫХ СКОРОСТЕЙ И ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

Expressions for velocities of propagation of quasilongitudinal and quasitransversal waves in orthotropic material, and also coordinates of points of the media determining position of three-dimensional wave front during the any moment of time are obtained. Examples of construction of surfaces of reverse velocities and wave surfaces for fabric fiberglass are resulted.

В динамической теории упругости анизотропных сред большое место занимают исследования поверхностей, характеризующих различные аспекты распространения упругих волн, каковыми, например, являются поверхности обратных скоростей, лучевые поверхности и т. д. [1]. Это обусловлено тем, что такие поверхности позволяют не только рассчитать скорости распространения волн, переноса энергии, но и наглядно представить волновые процессы, описать их особенности. Достаточно полно закономерности распространения упругих волн в анизотропных средах различных классов симметрии анализируются в большом количестве публикаций, в том числе в [2]. Тем не менее трехмерные представления волновых движений (поверхности обратных скоростей, волновые поверхности) в анизотропных материалах, в частности материалах ромбической системы (ортотропных), отсутствуют практически в полном объеме. В настоящей работе представлены результаты моделирования трехмерных волновых движений, распространяющихся в упругих ортотропных средах от сосредоточенного источника, полученные с помощью метода характеристик теории дифференциальных уравнений с частными производными [3,4].

Поверхности обратных скоростей. Уравнения движения анизотропных сред ромбической системы симметрии представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (A_{13} + A_{55})\partial_1\partial_3u_3 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2u_2 + \\ & + A_{11}\partial_1^2u_1 + A_{66}\partial_2^2u_1 + A_{55}\partial_3^2u_1 = \rho\partial_t^2u_1, \\ & (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2u_2 + (A_{23} + A_{44})\partial_2\partial_3u_3 + \\ & + A_{66}\partial_1^2u_2 + A_{22}\partial_2^2u_2 + A_{44}\partial_3^2u_2 = \rho\partial_t^2u_2, \\ & (A_{13} + A_{55})\partial_1\partial_3u_1 + (A_{23} + A_{44})\partial_2\partial_3u_2 + \\ & + A_{55}\partial_1^2u_3 + A_{44}\partial_2^2u_3 + A_{33}\partial_3^2u_3 = \rho\partial_t^2u_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где A_{ij} , A_{kk} - константы упругости, u_i - компоненты вектора перемещения, ρ - плотность, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $i, j = \overline{1,3}$, $k = \overline{4,6}$.

После стандартной процедуры, описанной в [3, 4], для уравнения характеристик системы (1) будем иметь

$$q_0 p_0^6 / c^6 + q_1 p_0^4 / c^4 + q_2 p_0^2 / c^2 + q_3 = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned}
 q_0 &= -1, \\
 q_1 &= (a_1 + a_5 + a_6) p_1^2 + (a_2 + a_4 + a_6) p_2^2 + (a_3 + a_4 + a_5) p_3^2, \\
 q_2 &= (2a_4^2 - a_1a_2 - a_1 - a_5a_2 - a_6 - a_5a_6 + 2a_4a_6) p_1^2 p_2^2 + \\
 &\quad + (a_7^2 - a_1a_3 - a_1 - a_5 - a_3a_6 - a_5a_6 + 2a_7a_5) p_1^2 p_3^2 + \\
 &\quad + (a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8) p_2^2 p_3^2 - \\
 &\quad - (a_1a_5 + a_1a_6 + a_5a_6) p_1^4 - (a_2 + a_2a_6 + a_6) p_2^4 - (a_3 + a_3a_5 + a_5) p_3^4, \\
 q_3 &= a_1a_5a_6p_1^6 + a_2a_6p_2^6 + a_3a_5p_3^6 + p_1^2(p_2^4(a_2(a_1 + a_5a_6) - a_4(a_4 + 2a_6)) + \\
 &\quad + p_3^4(a_3(a_1 + a_5a_6) - a_7(a_7 + 2a_5))) + p_2^2(p_1^4(a_1(a_2a_5 + a_6) - a_5a_7(a_7 + 2a_6)) + \\
 &\quad + p_3^4(a_3(a_2a_5 + a_6) - a_5a_8(a_8 + 2))) + p_3^2(p_1^4(a_1(a_5 + a_3a_6) - a_6a_7(a_7 + 2a_5)) + \\
 &\quad + p_2^4(a_2(a_5 + a_3a_6) - a_6a_8(a_8 + 2))) + a_9p_1^2p_2^2p_3^2,
 \end{aligned}$$

где $a_9 = 2a_5a_6 + a_1a_2a_3 + a_1 + a_2a_5^2 + a_3a_6^2 - a_3(a_7 + a_6)^2 - a_1(a_8 + 1)^2 - a_2(a_7 + a_5)^2 + 2(a_8 + 1)(a_7 + a_5)(a_7 + a_6)$, $a_i = A_{ii}/A_{44}$, $a_4 = A_{12}/A_{44}$, $a_7 = A_{13}/A_{44}$, $a_8 = A_{23}/A_{44}$, $c = \sqrt{A_{44}/\rho}$, $i = 1, 2, 3, 5, 6$.

Из уравнения (2) найдем безразмерные скорости V_l распространения упругих волн (коэффициенты $\hat{q}_i$ получаем из приведенных коэффициентов q_i заменой параметров p_k на направляющие косинусы нормали к поверхности n_k , $i, k = \overline{1, 3}$):

$$\begin{aligned}
 v_k &= \sqrt{2\sqrt{\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{\bar{\Lambda} + 2\pi(4-k)}{3}\right) - \frac{\hat{q}_1}{3q_0}}, \\
 \bar{\Lambda} &= \arccos\left(-\frac{\bar{q}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{\bar{p}}\right)^3}\right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\bar{p} = -\frac{\hat{q}_1^2}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_2}{q_0}$; $\bar{q} = \frac{2\hat{q}_1^3}{27q_0^3} - \frac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_3}{q_0}$, $k = \overline{1, 3}$.

Для любых значений угла наклона нормали к характеристической поверхности $v_1 > v_2 \geq v_3$, т. е. индекс $k=1$ соответствует квазипродольной волне, индексы $k=2, 3$ - квазипоперечным волнам.

Полученные выражения для скоростей (3) позволяют выполнить построение безразмерных поверхностей обратных скоростей упругих волн, возбуждаемых точечным нестационарным источником в ортотропной среде. На рис. 1 представлены

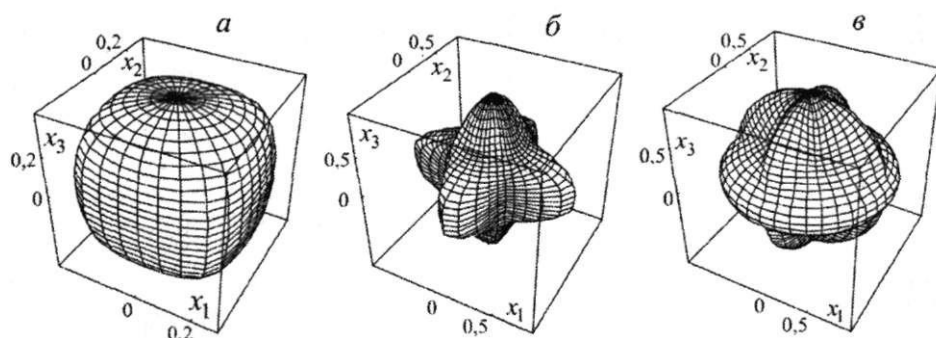


Рис. 1. Безразмерные поверхности обратных скоростей для тканевого стеклопластика горячего прессования СТЭТ: а - для квазипродольной волны, б, в - для квазипоперечных волн

безразмерные поверхности обратных скоростей $1/v_i$, $i = \overline{1,3}$, для квазипродольной (о) и квазипоперечных (б, в) волн, распространяющихся в тканевом стеклопластике горячего прессования СТЭТ, упругие свойства которого описываются следующими безразмерными константами: $a_1 = 12,72$, $a_2 = 10,80$, $a_3 = 6,92$, $a_4 = 2,82$, $a_5 = 1,05$, $a_6 = 1,21$, $a_7 = 2,65$, $a_8 = 2,95$ (данные, необходимые для расчета, взяты из [5]).

Заметим, что аналогичный вид имеют поверхности обратных скоростей для квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в намоточном однонаправленном и ортогонально-армированном стеклопластиках.

Волновые поверхности. Из уравнения (2) выразим параметр p_0

$$p_0^{(k)} = c \sqrt{2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\Lambda + 2\pi(4-k)}{3}\right) - \frac{q_1}{3q_0}},$$

$$\Lambda = \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right), \quad (4)$$

где $p = -\frac{q_1^2}{3q_0^2} + \frac{q_2}{q_0}$; $q = \frac{2q_1^3}{27q_0^3} - \frac{q_1q_2}{3q_0^2} + \frac{q_3}{q_0}$, верхний индекс указывает на тип упругой волны ($k=1$ соответствует квазипродольной волне, $k=2,3$ - квазипоперечным волнам).

Выполним дифференцирование выражений (4) по p_i , $i = \overline{1,3}$. В результате после несложных преобразований будем иметь безразмерные координаты $\left(\frac{x_1^{(k)}}{ct}, \frac{x_2^{(k)}}{ct}, \frac{x_3^{(k)}}{ct}\right)$ точек ортотропной среды, до которых к моменту времени t дошла энергия волнового возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{x_i^{(k)}}{ct} = & \frac{1}{v_k} \left(\frac{1}{2\sqrt{-3\bar{p}}} \left(\frac{2\bar{q}_i\bar{q}_{1i}}{3q_0^2} - \frac{\bar{q}_{2i}}{q_0} \right) \cos\left(\frac{\bar{\Lambda} + 2\pi(4-k)}{3}\right) - \right. \\ & - \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \sin\left(\frac{\bar{\Lambda} + 2\pi(4-k)}{3}\right) \sqrt{\frac{\bar{p}^3}{4\bar{p}^3 + 27\bar{q}^2}} \times \\ & \times \left(\frac{2\bar{q}_1^2\bar{q}_{1i}}{9q_0^3} - \frac{\bar{q}_{2i}\bar{q}_{1i} + \bar{q}_i\bar{q}_{2i}}{3q_0^2} + \frac{\bar{q}_{3i}}{q_0} \right) \sqrt{\left(-\frac{3}{\bar{p}}\right)^3} - \\ & \left. - \frac{9\bar{q}\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(-\frac{1}{\bar{p}}\right)^5} \left(\frac{2\bar{q}_i\bar{q}_{1i}}{3q_0^2} - \frac{\bar{q}_{2i}}{q_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь коэффициенты $\bar{q}_{ki}$, $i, k = \overline{1,3}$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{11} &= 2(a_1 + a_5 + a_6)n_1, \bar{q}_{12} = (a_2 + a_4 + a_6)n_2, \bar{q}_{13} = (a_3 + a_4 + a_5)n_3, \\ \bar{q}_{21} &= 2(2a_4^2 - a_1a_2 - a_1 - a_5a_2 - a_6 - a_5a_6 + 2a_4a_6)n_1n_2^2 + \\ &+ 2(a_7^2 - a_1a_3 - a_1 - a_5 - a_3a_6 - a_5a_6 + 2a_7a_5)n_1n_3^2 - 4(a_1a_5 + a_1a_6 + a_5a_6)n_1^3, \\ \bar{q}_{22} &= 2(2a_4^2 - a_1a_2 - a_1 - a_5a_2 - a_6 - a_5a_6 + 2a_4a_6)n_2n_1^2 + \\ &+ 2(a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8)n_2n_3^2 - 4(a_2 + a_2a_6 + a_6)n_2^3, \\ \bar{q}_{23} &= 2(a_7^2 - a_1a_3 - a_1 - a_5 - a_3a_6 - a_5a_6 + 2a_7a_5)n_3n_1^2 + \\ &+ 2(a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8)n_3n_2^2 - 4(a_3 + a_3a_5 + a_5)n_3^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{31} &= 6a_1a_5a_6n_1^5 + 2\left(n_2^4(a_2(a_1+a_5a_6)-a_4(a_4+2a_6)) + \right. \\
&+ n_3^4(a_3(a_1+a_5a_6)-a_7(a_4+2a_5)))n_1 + 4\left(n_3^2(a_1(a_5+a_3a_6)-a_6a_7(a_7+2a_5)) + \right. \\
&+ n_2^2(a_1(a_2a_5+a_6)-a_5a_7(a_7+2a_6)))n_1^3 + 2a_9n_1n_2^2n_3^2, \\
\bar{q}_{32} &= 6a_2a_5n_2^5 + 2\left(n_1^4(a_1(a_2a_5+a_6)-a_5a_7(a_7+2a_6)) + \right. \\
&+ n_3^4(a_3(a_2a_5+a_6)-a_5a_8(a_8+2)))n_2 + \\
&+ 4\left(n_1^2(a_2(a_1+a_5a_6)-a_4(a_4+2a_6)) + \right. \\
&+ n_3^2(a_2(a_5+a_3a_6)-a_6a_8(a_8+2)))n_2^3 + 2a_9n_2n_1^2n_3^2, \\
\bar{q}_{33} &= 6a_3a_5n_3^5 + 2\left(p_1^4(a_1(a_5+a_3a_6)-a_6a_7(a_7+2a_5)) + \right. \\
&+ p_2^4(a_2(a_5+a_3a_6)-a_6a_8(a_8+2)))n_3 + 4\left(n_1^2(a_3(a_1+a_5a_6)-a_7(a_7+2a_5)) + \right. \\
&+ n_2^2(a_3(a_2a_5+a_6)-a_5a_8(a_8+2)))n_3^3 + 2a_9n_3n_1^2n_2^2.
\end{aligned}$$

Вид волновых поверхностей квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в тканевом стеклопластике (рис. 2), определяется соответствующими безразмерными координатами из (5) (числовые данные прежние).

Из рис. 2 видно, что распространение квазипоперечных волн в тканевом стеклопластике сопровождается образованием сложной системы лакун. В частности, при распространении одной из квазипоперечных волн (рис. 2 б) возникают две кольцевые лакуны, при распространении другой квазипоперечной волны (рис. 2 в) - четыре лакуны с плоским основанием. Распространение квазипродольной волны в тканевом стеклопластике не сопровождается образованием лакун (рис. 2 а).

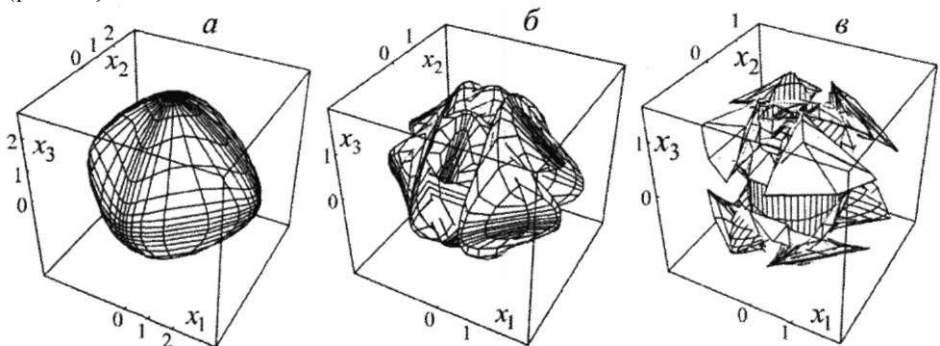


Рис. 2. Безразмерные трехмерные фронты упругих волн, распространяющиеся в тканевом стеклопластике СТЭТ: а - квазипродольная волна, б, в - квазипоперечные волны

В заключение отметим, что с помощью выражений (5) для координат, определяющих геометрию волнового фронта, достаточно легко можно построить сечения поверхностей обратных скоростей и трехмерных волновых фронтов координатными плоскостями, а также другими плоскостями, проходящими через начало координат.

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М., 1982.
2. Шаскольская М. П. Акустические кристаллы. М., 1982.
3. Курант Ф. Уравнения с частными производными. М., 1964.
4. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., 1980.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.

Поступила в редакцию 23.05.06.

Сергей Михайлович Босьяков - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.