

УДК 539.3

О.Л. ШВЕД

ДВОЙСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

The process representation has been obtained in terms of actual and unloading configurations, eliminating the influence of the proper orthogonal tensor, accompanying the elastic deformation.

Поведение деформируемого упругопластического тела можно описать, используя потенциальную природу его упругой деформации [1–3]. Необратимые составляющие деформируемого состояния в этом случае определяются из разложения Крёнера - Ли [4], причем уравнение состояния задается в виде обобщенного закона упругости, в частности в форме Мурнагана [1]. Условие потенциальности определяющих уравнений в скоростях напряжений в активном процессе, введенное с помощью объективной O -производной, позволяет определить S - девиаторное сечение предельной поверхности Π и получить спин Ω собственно ортогонального тензора поворота $\mathbf{O}$, сопровождающего упругую деформацию [5]. Тензор упругих искажений находится из решения системы определяющих уравнений. Однако при таком подходе появляется зависимость вычисляемого девиаторного сечения от тензора поворота $\mathbf{O}$, что создает существенные трудности при моделировании предельной поверхности, учете базовых экспериментов и введении методики описания эффекта Баушингера [6]. Для устранения влияния упругих поворотов предлагается использовать двойственное представление процесса деформации в двух пространствах напряжений: $\mathbf{T}$ - тензора Коши и $\mathbf{t} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^T$ - повернутого тензора Коши [5]. Представление становится возможным благодаря заданию скорости напряже-

ний через O -производную. Тем самым обосновывается ее выбор из множества объективных производных при введении скорости напряжений для эйлера описания [7]. Двойственное описание происходит с применением индифферентных и инвариантных тензоров [2, 7]. Отметим, что идея поэтапного учета поворотов для общей деформации использована в [8].

Введем неподвижный ортонормированный векторный базис отсчетной конфигурации $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Согласно полярному разложению градиента и транспонированного градиента упругой деформации выполняется $\bar{\nabla} \mathbf{R} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}$, $\bar{\nabla} \mathbf{R}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{U}$, где $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ - меры искажений. Меры упругой деформации

Фингера и Коши - Грина равны $\mathbf{F} = \bar{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \bar{\nabla} \mathbf{R}, \mathbf{G} = \bar{\nabla} \mathbf{R} \cdot \bar{\nabla} \mathbf{R}^T$. Положим $\mathbf{C}_k = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_k = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{O}$. Справедливы соотношения $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_s = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_k \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{O}$, $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_s = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_s$, $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_s = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_s$. Запишем тензор упругой деформации

Коши - Грина $\mathbf{C} = 2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$ ($\mathbf{E}$ - единичный тензор) покомпонентно: $\mathbf{C} = \eta_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \eta_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + \eta_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + \eta_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + \eta_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + \eta_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2)$. Обозначим $J_k, I_k, L_k - k$ -е инварианты $\mathbf{C}, \mathbf{G}$ и $\mathbf{F}, \mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Присоединяя к изотропному потенциалу Мурнагана [1, 2] анизотропные скалярные структуры первой и второй степени, получаем выражение для удельной потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} + \delta_1 \eta_1^2 + \delta_2 \eta_2^2 + \delta_3 \eta_3^2 + \delta_4 \eta_1 \eta_4 + \delta_5 \eta_2 \eta_4 + \delta_6 \eta_3 \eta_4 + \delta_7 \eta_4^2 + \delta_8 \eta_1 \eta_2 + \\ & + \delta_9 \eta_2 \eta_3 + \delta_{10} \eta_1 \eta_3 + \delta_{11} \eta_5^2 + \delta_{12} \eta_1 \eta_5 + \delta_{13} \eta_2 \eta_5 + \delta_{14} \eta_3 \eta_5 + \delta_{15} \eta_6^2 + \delta_{16} \eta_1 \eta_6 + \\ & + \delta_{17} \eta_2 \eta_6 + \delta_{18} \eta_3 \eta_6 + \delta_{19} \eta_4 \eta_5 + \delta_{20} \eta_4 \eta_6 + \delta_{21} \eta_5 \eta_6 + \\ & + 2^{-1}(\lambda + 2\mu)J_1^2 - 2\mu J_2 + 6^{-1}(v_1 + 6v_2 + 8v_3)J_1^3 - 2(v_2 + 2v_3)J_1 J_2 + 4v_3 J_3, \end{aligned}$$

где λ, μ - постоянные Ляме второго, v_1, v_2, v_3 - третьего порядка. Обеспечим неотрицательность ε . Находим $\mathbf{C}_0$ - близкую к 0 точку минимума ε . Описание процесса через меры деформации менее громоздко, чем через тензоры деформации. Поэтому, опуская постоянные, переходим к мере $\mathbf{G}$ в представлении $\varepsilon = \varepsilon'(\mathbf{G}) - \varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon'(\mathbf{G}_0)$, $\mathbf{G}_0 = 2\mathbf{C}_0 + \mathbf{E}$ или в тензорно-инвариантном виде

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 2^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{G} + 4^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 (\delta_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 2) + \delta_{3+i} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \right. \\ & + \delta_{11+i} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \delta_{15+i} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \\ & + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_8 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2) + \\ & + \delta_9 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + \delta_{10} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + \delta_{19} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{20} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{21} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ & + 4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3v_1 - 10v_2 - 8v_3)I_1^2 + \\ & + (-2\mu + 3v_2 + 4v_3)I_2 - (v_2 + 2v_3)I_1 I_2 + 12^{-1}(v_1 + 6v_2 + 8v_3)I_1^3 + 2v_3 I_3 - \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Для первоначально изотропной среды $\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}$, $\delta_j = 0$, $\mathbf{b} = 0$, а в активном процессе после появления необратимых деформаций эти значения, конечно, меняются. Обобщенный закон Мурнагана имеет вид

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1} \bar{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \partial \bar{\nabla} \mathbf{R} / \partial \mathbf{G} \cdot \bar{\nabla} \mathbf{R} = L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbf{T}_j + 2L_3^{-1}(\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{V} + \psi_2 \mathbf{F}), \quad (1)$$

$$\mathbf{T}_i = L_3^{-1}(\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_i - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_{3+i} = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + 2^{-1}(\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_i - 1)(\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{11+i} &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + (\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_i - 1)(\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{15+i} &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + (\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_i - 1)(\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2)) \cdot \mathbf{V} \quad (i = 1, 2, 3), \\
 \mathbf{T}_7 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{11} &= \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{15} &= \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_8 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_1 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_9 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{10} &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_1 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{19} &= L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{20} &= L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2)) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{21} &= L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2)) \cdot \mathbf{V}; \\
 \Psi_0 &= a_0 L_3^2 + c_0 L_1 L_3 + c_1 L_1 L_3 I_1, \quad \Psi_1 = c_0 (L_3 - L_1 L_2) + c_1 (-L_1^3 L_2 + L_1^2 L_3 - 2 L_2 L_3 + 2 L_1 L_2^2), \\
 \Psi_2 &= b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + c_0 (L_1^2 - L_2) + c_1 (L_1^4 - 3 L_1^2 L_2 + L_2^2 + 2 L_1 L_3); \\
 a_0 &= 2^{-1} v_3; \quad b_0 = 16^{-1} (-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3), \quad b_1 = 8^{-1} (2\lambda - 3v_1 - 4v_2), \\
 b_2 &= 16^{-1} (v_1 + 2v_2); \quad c_0 = 4^{-1} (2\mu - 3v_2 - 4v_3), \quad c_1 = 4^{-1} (v_2 + 2v_3); \\
 I_1 &= L_1^2 - 2L_2; \quad \mathbf{B} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}; \quad N = 21.
 \end{aligned}$$

При полной разгрузке элемента среды ($\mathbf{V} = \mathbf{E}$, $\mathbf{O} = \mathbf{E}$) для него имеем $\mathbf{T} = \mathbf{B}$ - тензор сдвига, или остаточных напряжений в пространстве $\mathbf{T}$, $\varepsilon = \varepsilon'(\mathbf{E}) - \varepsilon_0(\mathbf{G}_0) \geq 0$.

Запишем тензор напряжений, заданный в отсчетной - разгрузочной конфигурации:

$$\mathbf{t} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^T = L_3^{-1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{U} + \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbf{t}_j + 2L_3^{-1} (\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{U} + \psi_2 \mathbf{G}). \quad (2)$$

Формулы для тензоров $\mathbf{t}$; получаются из соотношений для $\mathbf{T}_j$ после замены величин $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ на $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{G}$ ($i = 1, 2, 3$) соответственно. При фиксированном тензоре сдвига $\mathbf{b}$ уравнение (2) однозначно обращается численно относительно тензора $\mathbf{U}$.

Разгрузочная конфигурация часто оказывается недостижимой, но заданные в ней тензоры всегда определены, что служит основанием для сохранения используемой обычно терминологии.

Ортонормированные собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ девиаторов $\text{dev} \mathbf{T}$ и $\text{dev} \mathbf{t}$ связаны соотношениями $\mathbf{e}_k = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{O}$. Выполняется $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{O}$, $t_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \text{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cdot \text{dev} \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_1$, $t_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \text{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \text{dev} \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_2$. При совпадающих двух собственных значениях $\text{dev} \mathbf{T}$, например $t_1 = t_2$, вопрос выбора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ рассмотрен в [7].

Тензор спина в активном процессе можно ввести в виде

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + (L_1 L_2 - L_3)^{-1} (a D_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + c D_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + c D_3 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)), \quad (3)$$

где $\mathbf{W}$, $\mathbf{D}$ - тензоры вихря и «деформации» скорости,

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_2, \quad D_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_3, \quad D_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_3, \\
 a &= v_4^2 (v_1 - v_2) + v_5^2 (v_1 + v_3) - v_6^2 (v_2 + v_3) - (v_1 - v_2)(v_1 + v_3)(v_2 + v_3), \\
 b &= v_4^2 (v_1 + v_2) + v_5^2 (v_1 - v_3) - v_6^2 (v_2 + v_3) - (v_1 + v_2)(v_1 - v_3)(v_2 + v_3), \\
 c &= -v_4^2 (v_1 + v_2) + v_5^2 (v_1 + v_3) + v_6^2 (v_3 - v_2) - (v_1 + v_2)(v_1 + v_3)(v_3 - v_2), \\
 v_4 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_2, v_5 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3, v_6 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3, v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

В пассивном процессе $\mathbf{\Omega}$ определяется известными соотношениями [2, 5].

Критериальный девиатор $\mathbf{Q} = \text{dev} \mathbf{T} = \text{dev} \mathbf{T} - \mathbf{\Omega} \cdot \text{dev} \mathbf{T} + \text{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$ (1), (3), различающий активный и пассивный процессы, получается в виде [5]: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$,

$$\mathbf{Q}_0 = \text{dev}(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(((b_1 + (2b_2 - c_1)I_1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + \\ + c_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - a_0L_3^2\mathbf{D} + (c_0 + c_1I_1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F})),$$

$$\mathbf{Q}_1 = L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((2\delta_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_4\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ + \delta_{10}\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{12}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{16}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + \\ + (2\delta_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_5\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \\ + \delta_9\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{13}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{17}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + \\ + (2\delta_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_6\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_9\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ + \delta_{10}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_{14}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{18}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \\ + (2^{-1} \sum_{i=1}^3 \delta_{i+3}\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i + \delta_7\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + 2^{-1}\delta_{19}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ + 2^{-1}\delta_{20}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) + \\ + (2^{-1} \sum_{i=1}^3 \delta_{i+11}\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i + \delta_{11}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + 2^{-1}\delta_{19}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ + 2^{-1}\delta_{21}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) + \\ + (2^{-1} \sum_{i=1}^3 \delta_{i+15}\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i + \delta_{15}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + 2^{-1}\delta_{21}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ + 2^{-1}\delta_{20}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{Q}_2 = (L_1L_2 - L_3)^{-1}((t_1 - t_2)aD_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + (2t_1 + t_2)bD_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + \\ + (t_1 + 2t_2)cD_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)).$$

Соотношения для девиаторов $\mathbf{Q}_j$ вычисляются по обычным правилам упругости [2].

Выражение $\mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{D}$ ($\delta\mathbf{D}$ - вариация $\mathbf{D}$) является потенциальным, т. е. существует скаляр $\varphi = \varphi(\mathbf{D})$ такой, что выполняется $\delta\varphi = \mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{D}$ ($\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{D}} = \mathbf{Q}$). Требование потенциальности выражения $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{NN} \cdot \delta\mathbf{D}$ определяет девиатор $\mathbf{N}$ и поверхность S в пространстве напряжений Коши [5].

В качестве меры изменения деформированного состояния в разгрузочной конфигурации можно принять тензор $\mathbf{d} = L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T$. Эта мера будет энергетически сопряженной с тензором напряжений $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^T \cdot L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T = L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T = L_3\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}.$$

Критериальный девиатор $\mathbf{q}$ в пространстве $\mathbf{t}$ задается в виде

$$\mathbf{q} = L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_j = L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{O}^T.$$

Соотношения для тензоров $\mathbf{q}_j$ повторяют формулы для $\mathbf{Q}_j$, в которых величины $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \mathbf{C}_i, \mathbf{e}_j, D_i$ заменены соответственно на $\mathbf{d}, \mathbf{t}, \mathbf{U}, \mathbf{G}, \mathbf{c}_i, \mathbf{i}_j, L_3D_i$ ($i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2$).

Имеем $\mathbf{q} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{O}^T = L_3\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}$, $\mathbf{O} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \delta L_3\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T = L_3\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{D}$, $L_3^2\mathbf{Q} \cdot \mathbf{NN} \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{O}^T \mathbf{O} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \delta\mathbf{d}$. Следовательно, если выражение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{NN} \cdot \delta\mathbf{D}$ потенциально, то и $\mathbf{q} \cdot \mathbf{nn} \cdot \delta\mathbf{d} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{nn} \cdot \delta\mathbf{d} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{nn} \cdot \delta\mathbf{d} = L_3^2\mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{O} \cdot \delta\mathbf{D}$. Обратно, имеем. Значит, если выражение $\mathbf{q} \cdot \mathbf{nn} \cdot \delta\mathbf{d}$ потенциально, то и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{NN} \cdot \delta\mathbf{D}$ потенциально, где

$$\mathbf{N} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{O}. \quad (4)$$

Таким образом, девиаторы нормалей $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ к предельным поверхностям в пространствах $\text{dev}\mathbf{T}$ и $\text{dev}\mathbf{t}$ связаны соотношением (4). Знаки скалярных выражений $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}$ и $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$, определяющих условия нагрузки или разгрузки, совпадают. Как

следует из соотношений для q , тензор n и, значит, девиаторное сечение предельной поверхности в пространстве t не зависят от тензора поворота O .

Тензоры второго ранга, индифферентные $V, F, B, C_k C_s, T_i, T, N, \dots$ и инвариантные $U, G, b, c_k c_s, t_i, t, n, \dots$, отличаются поворотом (4), например $V = O^T \cdot U \cdot O$. Они связаны дифференциально: O -производная индифферентного тензора равна повернутой материальной производной инвариантного тензора. Например, для V имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\dot{O}^T \cdot U \cdot O) + O^T \cdot \dot{U} \cdot O + O^T \cdot U \cdot \dot{O} = O^T \cdot \dot{U} \cdot O + O^T \cdot U \cdot \dot{O} + \\ &+ \dot{O}^T \cdot U \cdot O + O^T \cdot U \cdot O \cdot \dot{O}^T \cdot O = \Omega \cdot V + O^T \cdot U \cdot O \cdot V \cdot \Omega, \\ \dot{\bar{V}} &= \dot{V} - \Omega \cdot V + V \cdot \Omega = O^T \cdot \dot{U} \cdot O. \end{aligned}$$

В регулярной точке Π (при $Q \cdot N > 0$) пространства напряжений Коши постулируются закон упрочнения - определяющее уравнение для тензора сдвига B , определяющее соотношение в скоростях для T , и энергетическое уравнение в скоростях

$$\dot{\bar{B}} + \gamma p' E - \beta N = 0, \dot{\bar{T}} - Q + Q \cdot N N = 0, (L_3^{-1} \dot{\epsilon}) = T \cdot D - \alpha \xi Q \cdot N,$$

а также закон эволюции упругих постоянных анизотропии

$$\dot{\delta}_i = K \operatorname{dev} \dot{\bar{B}} \cdot T_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Смысл параметров γ, β , множителя Лагранжа условия несжимаемости в скоростях p' , α, ξ, K указан в [5], небольшие неточности, допущенные в которой, устранены в данной работе. В пространстве напряжений t соответствующие тензорные уравнения получаются поворотом

$$0 = O \cdot (\dot{\bar{B}} + \gamma p' E - \beta N) \cdot O^T = \dot{b} + \gamma p' E - \beta n,$$

$$0 = O \cdot (\dot{\bar{T}} - Q + Q \cdot N N) \cdot O^T = \dot{t} - q + q \cdot n n,$$

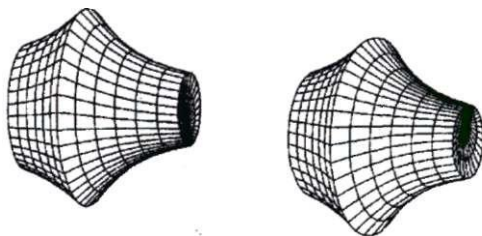
а скалярные уравнения запишутся в виде

$$L_3(L_3^{-1} \dot{\epsilon}) = t \cdot d - \alpha \xi q \cdot n, \dot{\delta}_i = K \operatorname{dev} \dot{b} \cdot t_i.$$

При разгрузке предельная поверхность в пространстве t остается неподвижной (2) и ее расположение в пространстве T определяется согласно отображению $T = O^T \cdot t \cdot O$. В зависимости от тензора O отклонения предельной поверхности, определяемой своим девиаторным сечением, в пространстве напряжений Коши от состояния в момент разгрузки могут быть значительными (рисунок).

При деформации без поворотов ($O = E$) эти пространства совпадают. Такие условия реализуются, если процесс осуществляется при $W = 0$ и соосности тензоров T, D или V, D при нагрузке или разгрузке соответственно. Процессы одноосных растяжения, сжатия и чистого сдвига, например, происходят без поворотов, и первые два являются базовыми. Установленные для t факты в базовых экспериментах переносятся на T . Важным моментом является задание функции скачков Π , определяющей ее новое положение.

Перенос данных для произвольного нагружения осуществляется интерполяцией в пространстве напряжений t . После определения в этом пространстве нового положения предельной поверхности она восстанавливается в пространстве T .



Раздвинутые горизонтально изображения S при двухмерном напряженно-деформированном состоянии. Ситуация в сингулярной точке Π аналогична рассмотренной.

1. Murnagan F. D. Finite deformation of an elastic solid. New York, 1967.
2. Лурыс А. И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
3. Ключников В. Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М., 1994.
4. Naghdi P. M. // ZAMP. 1990. Vol. 41. № 3. P. 315.
5. Швед О. Л. // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 3. С. 45.
6. Латыпов Г. Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л., 1968.
7. Поздсев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М., 1986.
8. Лсвитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев, 1987.

Поступила в редакцию 02.09.05.

Олег Лаврентьевич Швед - кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ОИПИ НАН Беларуси.