

УДК 517.977

П.В. МАКЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Method of optimal observation of special type time-delay systems is proposed; the example is adduced.

1. Пусть $T = [t_*, t^*]$ - промежуток наблюдения, $h = (t_* - t^*) / N$ - натуральное число), $T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^*\}$; $A(t) \in R^{n \times n}$, $a(t) \in R^n$, $t \in T$; $g(t) \in R^m$, $x_*(t) \in R$, $t \in T_0 = [t_* - \vartheta, t_*[$, - кусочно-непрерывные функции; $G \in R^{m \times m}$; $x_* \in R^n$; v_* , $v^* \in R^m$; $e_{i_*} \in R^n$ - орт с единицей на i_* -м месте; $\vartheta \in R$ ($\vartheta > 0$) - запаздывание.

Рассмотрим динамическую систему с запаздыванием, *положения* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in T$, которой изменяются согласно уравнению

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + e_{i_*} a'(t)x(t - \vartheta), \quad t \in T. \quad (1)$$

Назовем пару $x_t(\cdot) = (x(t); a(s + \vartheta)x(s), s \in [t - \vartheta, t])$ *состоянием* (1) в момент t . Каждому $x_t(\cdot)$, $t \in T$, соответствует единственное решение $x(t)$, $t \geq \tau$, уравнения (1).

Будем считать, что начальное состояние $x_{t_*}(\cdot) = (x_0; a(t + \vartheta)x_0(t), t \in [t_* - \vartheta, t_*])$ системы (1) неизвестно, априорная информация о нем имеет вид

$$x_0 = x_* + Gv; \quad a'(t + \vartheta)x_0(t) = x_*(t) + g'(t)v, \quad t \in T_0, \quad (2)$$

где $v \in R^m$ - неизвестный (векторный) *параметр начального состояния* с ограниченным множеством возможных значений: $v \in V = \{v \in R^m : v_* \leq v \leq v^*\}$. Следуя [1], множество V назовем *априорным распределением параметра* v .

Для уменьшения априорной неопределенности за системой (1) ведется наблюдение с обработкой сигналов $y(\cdot) = (y(\tau) \in R, \tau \in T_h)$ измерительного устройства

$$y(\tau) = c'(\tau)x(\tau) + \xi(\tau), \quad \xi_* \leq \xi(\tau) \leq \xi^*, \quad \tau \in T_h, \quad (3)$$

где $c(t) \in R^n$, $t \in T$, - непрерывная функция; $\xi(\tau) \in R$, $\tau \in T_h$, - ошибки измерения.

Пусть $y(\cdot)$ - сигнал измерительного устройства (3), записанный в некотором процессе наблюдения. Апостериорным распределением параметра v , соответствующим сигналу $y(\cdot)$, назовем множество $\hat{V} = \hat{V}(y(\cdot))$ таких и только таких параметров $v \in V$, при которых начальное состояние $x_*(\cdot) = (x_* + Gv; x_*(t) + g'(t)v, t \in T_0)$ может вместе с некоторыми возможными ошибками измерения $\xi(\cdot)$ породить записанный сигнал $y(\cdot)$. Элементы множества $\hat{V}$ называются апостериорными параметрами.

При решении целого ряда линейных задач оптимального управления в условиях неопределенности [2] используются линейные оценки множества $\hat{V}$:

$$\alpha^0(y(\cdot)) = p'v^0(y(\cdot)) = \max p'v, \quad v \in \hat{V} \quad (p \in R^m - \text{заданный вектор}). \quad (4)$$

Вычисление оценок (4) будем называть задачей оптимального (апостериорного) наблюдения (ОН) системы (1) - (3); $v^0(y(\cdot))$ - экстремальным параметром.

Рассмотрим текущий момент наблюдения $\tau \in T_h$ и записанный к этому моменту сигнал измерительного устройства $y_\tau(\cdot) = (y(t), t \in T_h(\tau) = \{t_*, t_* + h, \dots, \tau\})$. Апостериорное распределение $\hat{V}(\tau) = \hat{V}(\tau, y_\tau(\cdot))$ параметра v , построенное по текущему сигналу $y_\tau(\cdot)$, будем называть текущим распределением. Текущий параметр $v^0(\tau, y_\tau(\cdot))$ определим равенством $\alpha^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = p'v^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max p'v, \quad v \in \hat{V}(\tau, y_\tau(\cdot))$.

Пусть $Y(\tau)$ - множество всех сигналов $y_\tau(\cdot)$, которые могут быть записаны устройством (3) к моменту $\tau \in T_h$. Позиционным решением задачи (4) назовем функционал

$$v^0(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \quad \tau \in T_h, \quad (5)$$

позволяющий вычислять текущие экстремальные оценки для всех позиций $(\tau, y_\tau(\cdot)), y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \tau \in T_h$, которые могут возникнуть в процессе наблюдения.

Рассмотрим конкретный процесс наблюдения, по ходу которого записывается сигнал $y^*(\tau), \tau \in T_h$. Функцию $v^*(\tau) = v^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \tau \in T_h$, назовем реализацией позиционного решения (5). Получение $v^*(\tau), \tau \in T_h$, с помощью заранее (до начала наблюдения) синтезированного позиционного решения называется ОН по принципу замкнутого контура. Эта проблема не решена даже для систем без запаздывания ($\vartheta = 0$).

Цель статьи - описать для объектов вида (1) - (3) метод ОН в реальном времени [3, 4], в котором функционал (5) не строится, а каждый элемент $v^*(\tau), \tau \in T_h$, его реализации вычисляется с помощью оптимального эстиматора в процессе наблюдения за время, не превышающее h . Для систем без запаздывания данная задача решена в [1].

2. Пусть $T_{\text{оп}} \subset T_h$, $J_{\text{оп}} \subset J = \{1, 2, \dots, m\}$, $|T_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$; $F(t, s) = (F_{ij}(t, s)) = (F_1(t, s), \dots, F_n(t, s)) \in R^{n \times n}$, $t \in T$, $s \in [t_*, t_* + \vartheta]$, $i, j = \overline{1, n}$, - фундаментальная матрица [5] системы (1): $\partial F(t, s) / \partial t = A(t)F(t, s) + e_n(a'(t)F(t - \vartheta, s))'$, $F(s, s) = E$, $F_{ij}(t, s) \equiv 0$, $t \in [s - \vartheta, s]$, $s \in [t_*, t_* + \vartheta]$ ($E \in R^{n \times n}$ - единичная диагональная матрица). Положим

$$D_{\text{оп}} = D(T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}), \quad D(T, J) = \left(-c'(t)[F(t, t_*)G + \int_{t_* - \vartheta}^{t_*} F_{i_*}(t, \eta + \vartheta)g'(\eta)d\eta] \right)_{t \in T_h}. \quad (6)$$

Множество $K_{\text{оп}}$ назовем *опорой* задачи (4), если $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\} \neq \emptyset$, $\det D_{\text{оп}} \neq 0$ [6]; если $K_{\text{оп}} = \emptyset$, то $K_{\text{оп}}$ - *пустая опора* по определению; пара $\{v, K_{\text{оп}}\}$ - *опорный параметр*.

При фиксированном $y(\cdot)$ $\{v, K_{\text{оп}}\}$ сопровождают: 1) *ошибки измерения* $\xi(\tau) = y(\tau) - c'(\tau)x(\tau)$, $\tau \in T_h$, где $x(t)$, $t \in T$, - траектория системы (1), (2) с параметром v ; 2) *функция потенциалов* $\tilde{v}(\tau)$, $\tau \in T_h$: $\tilde{v} = \tilde{v}(T_h) = (\tilde{v}_{\text{оп}} = \tilde{v}(T_{\text{оп}}), \tilde{v}_n = \tilde{v}(T_n) = 0)$, $T_n = T \setminus T_{\text{оп}}$; $\tilde{v}'_{\text{оп}} = p'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^{-1}$, $p_{\text{оп}} = p(J_{\text{оп}})$; $\tilde{v} = 0$, если $K_{\text{оп}} = \emptyset$; 3) *вектор оценок* $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$: $\Delta' = p' - \tilde{v}'_{\text{оп}} D(T_{\text{оп}}, J)$; $\Delta = p$, если $K_{\text{оп}} = \emptyset$; 4) *псевдопараметр* $\omega(J) = (\omega_j, j \in J)$; *псевдотраектория* $\bar{x}(t)$, $t \in T$; *псевдоошибки измерения* $\zeta(T_h) = (\zeta_{\text{оп}} = \zeta(T_{\text{оп}}), \zeta_n = \zeta(T_n))$: $\omega_j = \arg \min \Delta_j \omega$, $\omega \in [v_{*j}, v_{*j}^*]$ при $\Delta_j \neq 0$; $\omega_j \in [v_{*j}, v_{*j}^*]$ при $\Delta_j = 0$, $j \in J_n$; $\zeta(\tau) = \arg \min v(\tau) \zeta$, $\zeta \in [\xi_*, \xi^*]$ при $\tilde{v}(\tau) \neq 0$; $\zeta(\tau) \in [\xi_*, \xi^*]$ при $\tilde{v}(\tau) = 0$, $\tau \in T_{\text{оп}}$; $\tilde{\zeta}_{\text{оп}} = (\zeta(\tau) = y(\tau) - D(T_{\text{оп}}, J_n) \omega_n - c'(\tau)[F(\tau, t_*)x_* + \int_{t_*-\theta}^t F_k(\tau, \eta + \theta)x_*(\eta)d\eta]$, $\tau \in T_{\text{оп}}$; $\omega_{\text{оп}} = D_{\text{оп}}^{-1}(\zeta_{\text{оп}} - \tilde{\zeta}_{\text{оп}})$. Пусть $\bar{x}(t)$, $t \in T$, траектория системы (1), (2) с параметром $v = \omega$. Тогда $\zeta(\tau) = y(\tau) - c'(\tau)\bar{x}(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Момент $\tau \in T_h \setminus \{t_*, t^*\}$ назовем *точкой минимума* функции $\zeta(\tau)$, если $\zeta(\tau - h) > \zeta(\tau) < \zeta(\tau + h)$, *точкой максимума*, если $\zeta(\tau - h) < \zeta(\tau) > \zeta(\tau + h)$; через T_0^- , T_0^+ обозначим множества точек минимума и максимума соответственно; $T^* = T_0^- \cup T_0^+$.

Критерий оптимальности опоры. Для оптимальности опоры $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее ω , $\zeta(T_h)$ выполнялись соотношения $v_{*j} \leq \omega_j \leq v_{*j}^*$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\xi_* \leq \zeta(\tau) \leq \xi^*$; $\tau \in T_n$. При этом $v^0(y(\cdot)) = \omega$.

3. *Двойственный метод* построения экстремального параметра v^* представляет итеративное преобразование опор. Начальная опора произвольная. Итерация метода

$$K_{\text{оп}} \rightarrow \bar{K}_{\text{оп}} \quad (7)$$

основана на принципе уменьшения *меры неоптимальности опоры* [6].

Прежде чем переходить к описанию итераций, найдем рабочие формулы для вычисления функции $\zeta(\tau)$, $\tau \in T_h$, и ее приращения $\Delta\zeta(\tau) = \bar{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)$, $\tau \in T_h$. Используя формулу Коши, для псевдотраектории $\bar{x}(\tau)$, $\tau \in T_h$, получим $\bar{x}(\tau) = [F(\tau, t_*)G + \int_{t_*-\theta}^t F_k(\tau, \eta + \theta)g'(\eta)d\eta]\omega + F(\tau, t_*)x_* + \int_{t_*-\theta}^t F_k(\tau, \eta + \theta)x_*(\eta)d\eta$. Применим к этому выражению квадратурную формулу: $\bar{x}(\tau) = F(\tau, t_*)G\omega + \sum_{s \in S} q_s F_k(\tau, s)g'(s - \theta)\omega + F(\tau, t_*)x_* + \sum_{s \in S} q_s F_k(\tau, s)x_*(s - \theta)$, где q_s , $s \in S = \{s_k \in [t_*, t + \theta], k = \overline{1, k^*}\}$, $s_1 = t_* < s_2 < \dots < s_{k^*}$, - квадратурные коэффициенты ($q_s > 0$, $s \in S$). Введем аппроксимацию $\bar{F}(t, t_*)$, $t \in T$, функции $F(t, t_*)$, $t \in T$. С этой целью разобьем T на промежутки $T^{(l)} = [t^l, t^{l+1}]$, $t^l \in T_h$, $l = \overline{1, l^* - 1}$; $t_* = t^1 < t^2 < \dots < t^{l^*} = t^*$. Пусть $P(t) \in R^n$, $t \in T(l)$, - конечно-параметрическая аппроксимация векторной функции $a'(t)F(t - \theta, t_*)$, $t \in T^{(l)}$. Положим $P(t) = P_l(t)$, $t \in T^{(l)}$, $l = \overline{1, l^* - 1}$. Выберем совокупность *точек обновления* $r^f \in T_h$, $f = \overline{1, f^*}$ ($t_* = r^1 < \dots < r^{f^*} < r^{f^*+1} = t^*$) и занесем в память значения $F(r^f, t_*)$, $f = \overline{1, f^*}$. Обозначим через $\bar{F}_f(t, t_*)$, $t \in R^f = [r^f, r^{f+1}]$, решение уравнения $\partial \bar{F}_f(t, t_*) / \partial t = A(t)F_f(t, t_*) + e_k P'(t)$, $t \in R^f$; $F_f(r^f, t_*) = F(r^f, t_*)$. (8)

Аналогично для каждого $s \in S \setminus \{t_*\}$ выберем на участке $T(s) = [s, t^*]$ аппроксимации $p_l(t, s) \in R$, $t \in T^{(l)}(s)$, $l = \overline{1, l^* - 1}$, функции $a'(t)F_k(t - \theta, s)$; $p_l(t, s) = p_l(t, s)$,

$t \in T^{(l)}(s)$, $l = \overline{1, l^* - 1}$, и запомним значения $F_k(r^f(s), s)$, $r^f(s) = r^f + s - t_*$, $f = \overline{1, f^*}$. Обозначим через $\tilde{F}_{f_k}(t, s)$, $t \in R_s^f = [r^f(s), r^{f+1}(s)]$, решение уравнения

$$\partial F_{f_k}(t, s) / \partial t = A(t)F_{f_k}(t, s) + e_k p(t, s), \quad t \in R_s^f; \quad F_{f_k}(r^f, s) = F_k(r^f, s). \quad (9)$$

Положим $\tilde{F}(t, t_*) = \tilde{F}_f(t, t_*)$, $t \in R^f$, $f = \overline{1, f^* - 1}$; $\tilde{F}_k(t, s) = \tilde{F}_{f_k}(t, s)$, $t \in R_s^f$, $f = \overline{1, f^* - 1}$, $s \in S \setminus \{t_*\}$. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти такие разбиения $T^{(l)}$, $T^{(l)}(s)$, $s \in S \setminus \{t_*\}$, аппроксимации $P(t) \in R^n$, $t \in T^{(l)}$; $p(t, s) \in R$, $t \in T^{(l)}(s)$, и точки обновления r^f ; $r^f(s)$, $s \in S \setminus \{t_*\}$, при которых выполняются неравенства $|\tilde{F}_{ij}(t, t_*) - F_{ij}(t, t_*)| \leq \varepsilon_1$, $i, j = \overline{1, n}$, $t \in T$; $|\tilde{F}_{ik}(t, s) - F_{ik}(t, s)| \leq \varepsilon_1$, $i = \overline{1, n}$; $t \in T(s)$. Функции $\tilde{F}(t, t_*)$, $t \in T$, $\tilde{F}_k(t, s)$, $t \in T(s)$, $s \in [t_*, t_* + \theta]$, назовем *квазиредуциями* функций $F(t, t_*)$, $t \in T$, $F_k(t, s)$, $t \in T(s)$, $s \in [t_*, t_* + \theta]$, соответственно.

Рабочие формулы для вычисления значений $\zeta(\tau)$, $\Delta \zeta(\tau)$, $\tau \in T_h$, имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & y(\tau) - c'(\tau)[\tilde{F}(\tau, t_*)G\omega + \sum_{s \in S} q_s \tilde{F}_k(\tau, s)g'(s - \theta)\omega + \\ & + \tilde{F}(\tau, t_*)x_* + \sum_{s \in S} q_s \tilde{F}_k(\tau, s)x_*(s - \theta)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta \zeta(\tau) = -c'(\tau)[\tilde{F}(\tau, t_*)G + \sum_{s \in S} q_s \tilde{F}_k(\tau, s)g'(s - \theta)]\Delta \omega, \quad \Delta \omega = \bar{\omega} - \omega. \quad (11)$$

Итерация (7) строится на основании формул (10), (11) по аналогии с работой [7]. При этом используется *априорная* информация $A(t)$, $t \in T$; $x_*(t)$, $g(t)$, $t \in T_0$; ξ_* , ξ^* ; $y(\tau)$, $\tau \in T_h$; θ , G , x_* , v_* , v^* ; $P(t)$, $t \in T^{(l)}$, $l = \overline{1, l^* - 1}$, $F(r^f, t_*)$, $f = \overline{1, f^*}$; $T^{(l)}(s)$, $p(t, s)$, $t \in T^{(l)}(s)$, $l = \overline{1, l^* - 1}$, $F_k(r^f(s), s)$, $f = \overline{1, f^*}$, $s \in S \setminus \{t_*\}$, и *текущая* информация $K_{\text{оп}}$; T_0^- , T_0^+ ; $D(T_{\text{оп}}, J)$; $\tilde{F}(\tau, t_*)$, $\tilde{F}(\tau - h, t_*)$, $\tilde{F}_k(\tau, s)$, $\tilde{F}_k(\tau - h, s)$, $\tau \in T^* \cup \{t^*\}$, $s \in S \setminus \{t_*\}$; $\tilde{v}(\tau)$, $\tau \in T_{\text{оп}}$; $\Delta_n = \Delta(J_n)$; ω . Построение $\bar{K}_{\text{оп}}$ может сопровождаться интегрированием систем (8), (9) на небольшом количестве промежутков длины h .

4. Приведем алгоритм работы оптимального эстиматора. В качестве начальной опоры $K_{\text{оп}}(\tau + h)$ в каждый текущий момент наблюдения $\tau + h > t_*$ он использует оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0(\tau)$, построенную для момента $\tau \in T_h$. В начальный момент времени - $K_{\text{оп}}(t_*) = \emptyset$. Тогда $\tilde{v}_{\text{оп}}(\tau + h) = \tilde{v}_{\text{оп}}^0(\tau)$; $\Delta(\tau + h) = \Delta^0(\tau)$; $\omega(\tau + h) = \omega^0(\tau)$. Построение реализации позиционного решения для текущего момента $\tau + h$ отличается от аналогичной задачи для момента τ только дополнительным ограничением

$$\xi_* \leq \zeta(\tau + h) \leq \xi^*, \quad (12)$$

где $\zeta(\tau + h)$ находим по формуле (10). Таким образом, для вычисления элемента реализации позиционного решения $v^*(\tau + h)$, $\tau \in T_h$, помимо текущей информации, нужны значения $\tilde{F}(\tau + h, t_*)$, $\tilde{F}_k(\tau + h, s)$, $s \in S \setminus \{t_*\}$. При их построении достаточно проинтегрировать на промежутке $[\tau, \tau + h]$ системы (8) и (9) с начальными условиями $F_f(\tau, t_*) = \tilde{F}(\tau, t_*)$ и $F_{f_k}(\tau, s) = \tilde{F}_k(\tau, s)$, $s \in S \setminus \{t_*\}$, соответственно.

Эстиматор подсчитывает $\zeta(\tau - h)$, $\zeta(\tau)$, $\zeta(\tau + h)$ и проверяет, является ли τ точкой экстремума. Если это так, то полагает $T^* = T^* \cap \{\tau\}$ и заносит в память значения $\tilde{F}(\tau, t_*)$, $\tilde{F}_k(\tau, s)$, $s \in S \setminus \{t_*\}$. В случае, когда неравенства (12) выполняются, имеет место равенство $K_{\text{оп}}^0(\tau + h) = K_{\text{оп}}^0(\tau)$. В противном случае вычисляется экстремальный параметр $v^0(t | \tau + h, y_{\tau+h}(\cdot))$, $t \in T(\tau + h)$, корректируя двойственным методом $K_{\text{оп}}^0(\tau)$.

При малых h построение $K_{\text{он}}^0(\tau+h)$ требует небольшого числа итераций, для каждой из которых достаточно интегрировать уравнения (8) и (9) на коротких промежутках времени. При этом основные вычисления допускают распараллеливание.

5. Рассмотрим систему, описывающую подачу топлива в камеру сгорания [8]:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -0,2\varphi(t) - 0,8\varphi(t-1) + \mu(t-1), \quad \dot{\mu}_1(t) = -\psi(t), \quad \dot{\mu}(t) = -\mu(t) + \psi(t) - \varphi(t), \\ \dot{\psi}(t) &= \mu_1(t) - \mu(t), \quad t \in [0, 10]; \quad \varphi(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v_2 + v_4, \quad \mu_1(0) = v_1 + 2v_3, \quad \mu(0) = v_3, \quad (13) \\ \psi(0) &= -\frac{1}{2}v_1; \quad -0,8\varphi(t) + \mu(t) = v_4 + tv_5 + t^2v_3, \quad t \in [-1; 0]; \quad -\frac{1}{2} \leq v_i \leq \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(t)$ - отклонение (от номинального) давления в камере сгорания, $\mu(t)$ - отклонение скорости инжекции и сгорания, $\mu_1(t)$ - отклонение расхода массы в момент t , $\psi(t)$ - отклонение давления в канале, $v = \{v_i, i = \overline{1,4}\}$ - неизвестный параметр.

За системой (1) ведется наблюдение при помощи измерительного устройства

$$y(\tau) = \varphi(\tau) + \mu_1(\tau) + \mu(\tau) + \psi(\tau) + \xi(\tau), \quad |\xi(\tau)| \leq 0,2, \quad \tau \in \{0, 0,1, 0,2, \dots, 10\}, \quad (14)$$

($\xi(\tau)$ - ошибки измерения). Данная математическая модель сводится к системе (1) - (3).

Для стационарной системы (13) фундаментальная матрица зависит от одного параметра: $F(t, s) = F(t-s)$, $t, s \in T$. Следуя общей схеме, для построения квазиредукции промежутков T был разбит на 4 равные части, на каждой из которых функция $a(t)F(t)$ была аппроксимирована многочленами 4-й степени. Использовалась одна точка обновления $r^1 = 0$. Точность квазиредукции составила $\varepsilon_1 = 0,0076$.

Предполагалось, что истинное значение параметра

$$v = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4} \right\};$$

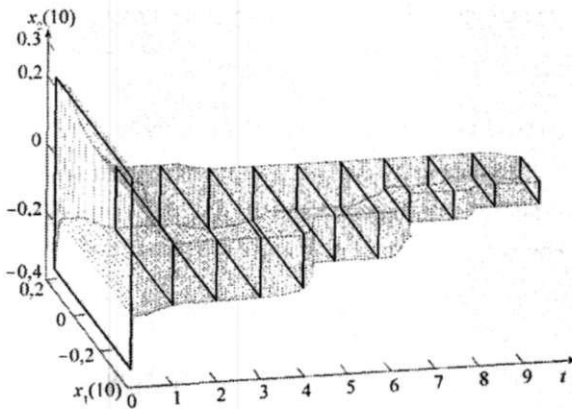
реализовавшая функция ошибок

измерения имела вид

$$\xi(t) = 0,2 \sin(t) \quad \text{при } t < 7,$$

$$\xi(t) = 0,2 \sin(2t) \quad \text{при } t \geq 7.$$

Качество приближенного решения (рисунок) оценивалось с помощью точного решения задачи ОН системы (13), (14). Погрешность полученных оценок апостериорного распределения конечного положения $\hat{X}^*$ не превысила 0,03.



Текущие оценки терминального положения

1. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. // Изв. АН ТиСУ. 2002. № 2. С. 35.
2. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 35.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 15.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. // Докл. НАН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 777.
5. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. В 5 ч. Ч. 1. Линейные задачи. Мн., 1984.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Макевич П.В. // Докл. НАН Беларуси. 2006. № 1.
8. Manitius K. // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. Vol. 29. № 12.

Поступила в редакцию 28.03.06.

Павел Вацлавович Макевич - аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор кафедры методов оптимального управления Р. Габасов.