

УДК 519.624

П.И. МОНАСТЫРНЫЙ, С.Н. СТЕЛЬМАХ

О ПРИВЕДЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧАМ КОШИ НА ОСНОВЕ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

For boundary problems in case of systems of the linear ordinary differential equations of the first order with not divided boundary conditions construction and substantiation of method of reduction to Cauchy problems on the basis of unitary transformations is given.

1. Рассмотрим граничную задачу для системы о. д. у. первого порядка

$$y' = P(t) \cdot y + f(t), \quad a < t < b, \quad (1)$$

с неразделенными условиями

$$A y(a) + B y(b) = c, \quad (2)$$

где $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$, $P(t) = (p_{ij}(t))_1^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, $A = (a_{ij})_1^n$, $B = (b_{ij})_1^n$, $C = (c_1, \dots, c_n)^T$. Предполагается, что $\text{rang } [A|B] = n$ и решение $y(t)$ задачи (1), (2) существует и единственно.

Среди методов численного решения граничных задач вида (1), (2) важное место занимают методы редукции: метод дополнительных функций, метод сопряженных уравнений, различные варианты метода прогонки и др., которые успешно реализуются при жестких ограничениях на параметры задачи, в частности, практически для всех методов требуется, чтобы граничные условия (2) имели разделенный вид [1–3]. Здесь предлагается метод численного решения задач вида (1), (2) при самых общих предположениях на входные данные задач, основанный на приведении к задачам Коши и замыкающей системе ЛАУ с помощью унитарных преобразований [4, 5]. Такой подход к численному решению задач вида (1), (2) имеет очевидные преимущества [1, 2], поскольку для численного решения задач Коши могут быть применены многие эффективные методы высокого порядка точности.

2. Вначале рассмотрим случай, когда $\det B \neq 0$ и матрица $P(t)$ косозермитова, т. е. $P^*(t) = -P(t)$, где $*$ отмечен переход к комплексно-сопряженной матрице. Обозначим через $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ вектор-строки матриц A и B соответственно. Используя процесс ортогонализации по Шмидту векторов $b_1, b_2, \dots, b_n$, разложим матрицу B^* в произведение унитарной и верхней треугольной матриц $B^* = U^* Sm(B^*)$, где матрица U^* - унитарная ($U^* U = U U^* = E$), а $Sm(B^*)$ - матрица Шмидта, имеющая вид:

$$Sm(B^*) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_{ii} & \dots & p_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом коэффициенты p_{ii} выбирают из условия $\|u_i\| = 1$, а коэффициенты p_{ij} находят из условия $(u_i, u_j) = 0$ (через $u_1, \dots, u_n$ обозначены вектор-столбцы матрицы U^*).

Таким образом, может быть получено разложение $B = Sm^*(B^*) \cdot U$. С учетом того, что матрица $Sm^*(B^*)$ имеет обратную [2], преобразуем граничное условие (2) в эквивалентное вида

$$U \cdot y(b) = u, \quad (3)$$

где матрица U - унитарная ($U^*U = UU^* = E$), $u = z - T \cdot y(a)$, вектор z и квадратная матрица Γ определяются в процессе ортогонализации по Шмидту [1, 2] и имеют следующий смысл: $z = [Sm^*(B^*)]^{-1}C$, $T = [Sm^*(B^*)]^{-1}A$.

Будем временно рассматривать граничную задачу (1), (3) как задачу с разделенными условиями, несмотря на то, что вектор u неизвестен. Условие (3), вообще говоря, можно перенести на весь отрезок $[a, b]$ справа налево, используя соотношение [3,4]:

$$\Gamma(t)y(t) = \gamma(t), \quad (4)$$

где матрица $\Gamma(t) = (\gamma_{ij})_n^n$ определяется как решение задачи Коши

$$\Gamma'(t) + \Gamma(t)P(t) = 0, \quad b > t \geq a, \quad (5)$$

$$\Gamma(b) = U, \quad (6)$$

а вектор-функции $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T$ - по формулам

$$\gamma'(t) = \Gamma(t)f(t), \quad b > t \geq a, \quad (7)$$

$$\gamma(b) = u. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть матрица U в граничном условии (3) удовлетворяет условию унитарности $U^*U = UU^* = E$. Тогда матрица $\Gamma(t)$, определяемая как решение задачи Коши (5),(6) с косоэрмитовой матрицей $P(t)$, унитарна при всех $t \in [a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\Omega(t) = \Gamma(t)\Gamma^*(t)$. Так как $\Gamma(b) = U$, то $\Omega(b) = \Gamma(b)\Gamma^*(b) = UU^* = E$. Также получим: $\Omega'(t) = (\Gamma(t)\Gamma^*(t))' = -\Gamma(t)P(t)\Gamma^*(t) + \Gamma(t)(-P^*(t))\Gamma^*(t) = -\Gamma(t)[P(t) + P^*(t)]\Gamma^*(t) \equiv 0$ в силу того, что матрица $P(t)$ косоэрмитова. Значит, $\Omega(t) \equiv \text{const} = \Omega(b) = E$. ■

Для того чтобы задача Коши (7), (8) корректно определяла вектор-функцию $\gamma(t)$, надо уточнить смысл начального условия (8), так как оно содержит в правой части $u = z - T \cdot y(a)$ неизвестное значение $y(a)$. Эту неопределенность можно устранить. Из (7) получим

$$\gamma(b) = \gamma(a) + \int_a^b \Gamma(t)f(t)dt. \quad (9)$$

Учитывая, что $y(a) = \Gamma^*(a)\gamma(a)$, $y(b) = \Gamma^*(b)\gamma(b)$ и $\gamma(b) = z - T\Gamma^*(a)\gamma(a)$, в предположении, что

$$\det(E + T \cdot \Gamma^*(a)) \neq 0, \quad (10)$$

из (9) получим

$$\gamma(a) = (E + T\Gamma^*(a))^{-1}(z - \int_a^b \Gamma(t)f(t)dt). \quad (11)$$

Таким образом, вектор-функция $\gamma(t)$ может быть найдена как решение задачи Коши:

$$\gamma'(t) = \Gamma(t)f(t), \quad a < t \leq b, \quad (12)$$

$$\gamma(a) = (E + T\Gamma^*(a))^{-1}(z - \int_a^b \Gamma(t)f(t)dt). \quad (13)$$

Полная вычислительная схема метода унитарной прогонки для задачи (1), (2) содержит следующие этапы:

- 1) используя ортогонализацию векторов $b_i, i = \overline{1, n}$, по Шмидту, приводим граничное условие (2) к виду (3), т. е. вычисляем матрицы U, T и вектор z ;
 - 2) решаем задачу Коши (5), (6) и находим на $[a, b]$ унитарную матрицу $\Gamma(t)$;
 - 3) проверяем выполнимость условия (10) и вычисляем $\gamma(t)$ в направлении от a к b как решение задачи Коши (12), (13);
 - 4) по формуле $y(t) = \Gamma^*(t)\gamma(t)$ вычисляем на $[a, b]$ искомое решение граничной задачи (1), (2).
3. Изложенный метод унитарной прогонки обладает устойчивостью в малом [4].

Теорема 2. Если граничная задача (1), (2) устойчива относительно малых изменений величин, определяющих ее, то при $P^*(t) = -P(t)$ устойчив в малом и метод унитарной прогонки, определяемый формулами (5), (6), (12), (13) и (4).

Доказательство. Устойчивость в малом трактуется [4] как свойство рассматриваемого метода при его приближенной реализации приводить к решению, которое удовлетворяет родственной граничной задаче со слабо возмущенными параметрами по отношению к параметрам исходной граничной задачи. Пусть задачи Коши (5), (6), (12), (13) и формула (4) реализуются приближенно:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}'(t) + \tilde{\Gamma}(t)P(t) &= \varepsilon_1(t), \quad b > t \geq a, \\ \tilde{\Gamma}(b) &= U + \delta_1; \\ \tilde{\gamma}'(t) &= \tilde{\Gamma}(t)f(t) + \varepsilon_2(t), \quad a < t \leq b, \\ \tilde{\gamma}(a) &= (E + T\tilde{\Gamma}^*(a))^{-1} \left(z - \int_a^b \tilde{\Gamma}(t)f(t) dt \right) + \delta_2; \\ \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\gamma}(t) &= \tilde{\gamma}(t),\end{aligned}\tag{4'}$$

где $\varepsilon_i(t), \delta_i, i = 1, 2$, - некоторые возмущения, вносимые методами приближенного решения задач (5), (6) и (12), (13). Прямые вычисления можно установить, что вектор-функция $\tilde{\gamma}(t)$, определяемая по формуле (4'), удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned}\tilde{y}' &= \tilde{P}(t)\tilde{y} + \tilde{f}(t), \quad a < t < b, \\ \tilde{A}\tilde{y}(a) + \tilde{B}\tilde{y}(b) &= \tilde{c},\end{aligned}$$

где $\tilde{P}(t), \tilde{f}(t), \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ при малых возмущениях $\varepsilon_i(t), \delta_i$ мало отличаются от точных значений $P(t), f(t), A, B, C$ соответственно. Это означает [3, 6], что рассматриваемый метод унитарной прогонки устойчив в малом. ■

Замечание 1. Если условие $\det B \neq 0$ не выполняется, но при этом $\det A \neq 0$, то по аналогии с приведенным нами алгоритмом можно осуществить перенос граничного условия (2) с помощью соотношения $\Gamma(t)y(t) = \gamma(t)$, в котором матрица $\Gamma(t)$ определяется как решение аналогичной задачи Коши с начальным условием при $t = a$, а $\gamma(t)$ - с начальным условием при $t = b$.

2. Если матрица $P(t)$ не является косоэрмитовой, то приведенный алгоритм можно видоизменить и придать ему следующую форму:

- 1) используя ортогонализацию векторов $b_i, i = \overline{1, n}$, по Шмидту, приводим граничное условие (2) к виду $Uy(b) = \gamma$, где $\gamma = z - T \cdot y(a)$ и $U^*U = E$;
- 2) решаем задачу Коши для уравнения

$$\Psi'(t) + \Psi(t)P(t) = 0, \quad b > t \geq a,$$

с начальным условием $\Psi(b) = U$ и находим тем самым на отрезке $[a, b]$ квадратную матрицу $\Psi(t)$;

3) находим вектор-функцию $\gamma(t)$ как решение уравнения

$$\gamma'(t) - \Gamma(t)P(t)\Gamma^*(t)\gamma(t) = \Gamma(t)f(t), \quad a < t \leq b,$$

с начальным условием

$$\gamma(a) = U(\Psi(a) + T)^{-1} \left(z - \int_a^b \Psi(t)f(t) dt \right)$$

в предположении, что $\Gamma(t) \equiv U$;

4) искомое решение граничной задачи (1), (2) находим по формуле $y(t) = U^* \gamma(t)$.

Замечание 2. Из формулы $y(t) = U^* \gamma(t)$ в силу унитарности матрицы U следует $\|y(t)\|^2 = \|\gamma(t)\|^2$, где $\|\cdot\|$ - евклидова норма. Таким образом, имеет место благоприятное в вычислительном отношении свойство: компоненты вектор-функции $\gamma(t)$ имеют тот же порядок роста, что и компоненты вектор-функции $y(t)$ - искомого решения граничной задачи (1), (2).

1. Самарский А.А., Гулин А.В. // Численные методы. М., 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Кобельников Г.М. // Численные методы. М., 1987.
3. Абрамов А.А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 3. С. 542.
4. Монастырный П.И. // Там же. 1971. Т. 11. № 4. С. 925.
5. Монастырный П.И., Метельский Н.Н. // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16. № 1. С. 982.
6. Монастырный П.И., Кремень Е.В. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 2. С. 5.

Поступила в редакцию 24.03.06.

Петр Ильич Монастырный - доктор физико-математических наук, профессор кафедры численных методов и программирования.

Сергей Николаевич Стельмах - аспирант кафедры численных методов и программирования. Научный руководитель - П.И. Монастырный.