

# Математика и информатика



УДК 517.958:537.8(075.8)

В.Т. ЕРОФЕЕНКО, Д.П. ТАВАККОЛИ (ИРАН)

## БАЗИСНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В БИИЗОТРОПНЫХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

The systems of basis monochromatic electromagnetic fields that satisfy Maxwell's equations for biisotropic media with arbitrary complex parameters of media and fields were obtained. Equation's solutions are represented in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate frames through special functions.

В математической физике большое внимание уделяется исследованию электромагнитных полей в композитных материалах и решению краевых задач дифракции для структур из этих материалов [1]. В ряде работ решаются краевые задачи в плоскостных областях из киральных и биизотропных материалов [2-5] с использованием плоских электромагнитных полей. Данная статья ставит своей целью построение базисных плоских, цилиндрических и сферических электромагнитных полей с произвольными комплексными параметрами среды и поля, что позволит формализовать аналитическое решение многих краевых задач дифракции, используемых в приложениях.

**1. Уравнения Максвелла в биизотропной среде.** Рассмотрим евклидово пространство  $R^3$  с фиксированной декартовой системой координат  $Oxyz$ , заполненное однородной биизотропной средой, которая характеризуется постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon, \mu$  и произвольными комплексными постоянными  $Z$  и  $G$ , которые в общем случае могут зависеть от круговой частоты поля  $\omega$ . Комплексные амплитуды  $E, H$  электромагнитного поля с зависимостью от времени вида  $\exp(-i\omega t)$  в биизотропной среде удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} E = i\omega(\mu H + ZE), \quad \operatorname{rot} H = -i\omega(\epsilon E + GH). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнения в форме Борна - Федорова [1, с. 164; 6]:

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu_s(H + \beta \operatorname{rot} H), \quad \operatorname{rot} H = -i\omega\epsilon_s(E + \eta \operatorname{rot} E). \quad (2)$$

Разрешая систему (2) относительно роторов, приходим к уравнениям вида (1), где  $\epsilon = \epsilon_s q$ ,  $\mu = \mu_s q$ ,  $Z = -i\omega\epsilon_s\mu_s\beta q$ ,  $G = i\omega\epsilon_s\mu_s\eta q$ ,  $q = (1 - \omega^2\epsilon_s\mu_s\beta\eta)^{-1}$ , т. е. решение уравнений (2) сводится к решению уравнений (1).

Из первого уравнения (1) найдем

$$H = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E - \frac{Z}{\mu} E \quad (3)$$

и подставим во второе из (1). Получим волновое уравнение для вектора электрической напряженности  $\Delta E - \operatorname{grad} \operatorname{div} E - a \operatorname{rot} E + gE = 0$ , (4)

где  $a = i\omega(G - Z)$ ,  $g = k^2 - \omega^2 ZG$ ,  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $0 \leq \arg k < \pi$ .

Таким образом, система уравнений (3), (4) эквивалентна (1).

Аналогично получим

$$\Delta \mathbf{H} - \text{grad div } \mathbf{H} - a \text{rot } \mathbf{H} + g\mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что из уравнений (4), (5) следуют условия  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ .

**2. Решение волнового уравнения.** Поставим задачу о нахождении плоских решений волнового уравнения (4), т. е. решений вида

$$\mathbf{E} = (A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y + C\mathbf{e}_z) \exp[i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \gamma z)], \quad (6)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\gamma$  - неизвестные постоянные, а  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - произвольные заданные комплексные числа, определяющие волновой вектор  $\mathbf{e} = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ . Воспользуемся методикой [7, с. 101], обобщив результаты на произвольные комплексные параметры и получив дополнительные соотношения между коэффициентами полей. Подставим (6) в (4) и запишем уравнение покомпонентно в виде однородной системы скалярных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 - \gamma^2 + L)A + (\alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\gamma)B + (\gamma\alpha_1 - i\alpha_2\alpha_2)C &= 0, \\ (\alpha_1\alpha_2 - i\alpha_1\gamma)A + (\alpha_2^2 - \gamma^2 + L)B + (\gamma\alpha_2 + i\alpha_1\alpha_1)C &= 0, \\ (\gamma\alpha_1 + i\alpha_2\alpha_2)A + (\gamma\alpha_2 - i\alpha_1\alpha_1)B + LC &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L = g - \lambda^2$ ,  $\lambda^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ ,  $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ ,  $0 \leq \arg \lambda < \pi$ .

Приравнявая к нулю определитель линейной системы (7), получим дисперсионное уравнение для определения параметра  $\gamma$ :

$$\Omega^2 - (a^2 + 2L)\Omega + L^2 - a^2\lambda^2 = 0, \quad \Omega = \gamma^2. \quad (8)$$

Найдем два решения уравнения (8):  $\Omega_j = L + \frac{1}{2}a^2 + af_j$ ,

где  $f_j = (-1)^j f$ ,  $j = 1, 2$ ,  $f = \sqrt{k^2 - b^2}$ ,  $b = \frac{1}{2}\omega(G + Z)$ ,  $0 \leq \arg f < \pi$ .

Далее определим четыре значения параметра  $\gamma$ :

$$\gamma = \pm\sqrt{\Omega_j} = \pm\gamma_j = \pm iv_j, \quad v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \quad (9)$$

где  $k_j = \sqrt{k^2 - \omega^2 ZG + \frac{1}{2}a^2 + af_j}$ ,  $0 \leq \arg k_j < \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}$ .

Найдем нетривиальные решения системы (7), которые существуют для значений параметра (9). Первые два уравнения (7) линейно независимы так как для матрицы при неизвестных  $A$  и  $B$  ее определитель  $d = -\lambda^2 ag_j \neq 0$  ( $g_j = f_j - \frac{1}{2}a$ ) при  $G \neq Z$ ,  $g_j \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ . Величины (9) подставим в (6) и (7), положим  $C = -\lambda^2 ag_j$  и найдем коэффициенты  $A$  и  $B$  из первых двух уравнений (7). В результате определим четыре векторных поля (6), удовлетворяющих уравнению (4):

$$\mathbf{E} = (A^{(\pm j)}\mathbf{e}_x + B^{(\pm j)}\mathbf{e}_y + C^{(\pm j)}\mathbf{e}_z) \exp[i(\alpha_1 x + \alpha_2 y \pm \gamma_j z)], \quad (10)$$

где

$$A^{(\pm j)} = a(\pm\alpha_1\gamma_j g_j + i\alpha_2 g_j), \quad B^{(\pm j)} = a(\pm\alpha_2\gamma_j g_j - i\alpha_1 g_j), \quad C^{(\pm j)} = -\lambda^2 ag_j. \quad (11)$$

Из условия (3) определим поле, удовлетворяющее уравнению (5):

$$\mathbf{H} = (F^{(\pm j)}\mathbf{e}_x + G^{(\pm j)}\mathbf{e}_y + L^{(\pm j)}\mathbf{e}_z) \exp[i(\alpha_1 x + \alpha_2 y \pm \gamma_j z)], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(\pm j)} &= [\alpha_2 C^{(\pm j)} \mp \gamma_j B^{(\pm j)} - Z\omega A^{(\pm j)}] / (\omega\mu), \\ G^{(\pm j)} &= [\pm\gamma_j A^{(\pm j)} - \alpha_1 C^{(\pm j)} - Z\omega B^{(\pm j)}] / (\omega\mu), \\ L^{(\pm j)} &= [\alpha_1 B^{(\pm j)} - \alpha_2 A^{(\pm j)} - Z\omega C^{(\pm j)}] / (\omega\mu). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как поля (10), (12) удовлетворяют одним и тем же уравнениям (4) и (5), то поле (12) совпадает с полем (10) с точностью до постоянного множителя.

**Лемма 1.** Для коэффициентов (11), (13) имеют место соотношения

$$F^{(\pm j)} = p_j A^{(\pm j)}, \quad G^{(\pm j)} = p_j B^{(\pm j)}, \quad L^{(\pm j)} = p_j C^{(\pm j)}, \quad (14)$$

где 
$$p_j = \frac{1}{\mu} \left( \frac{ig}{\omega g_j} - Z \right).$$

**Доказательство.** Докажем соотношения

$$\alpha_2 C^{(\pm j)} \mp \gamma_j B^{(\pm j)} = iq_j A^{(\pm j)}, \quad (15)$$

$$\pm \gamma_j A^{(\pm j)} - \alpha_1 C^{(\pm j)} = iq_j B^{(\pm j)}, \quad (16)$$

$$\alpha_1 B^{(\pm j)} - \alpha_2 A^{(\pm j)} = iq_j C^{(\pm j)}, \quad q_j = \frac{g}{g_j}. \quad (17)$$

Соотношение (17) очевидно, а равенство (16) следует из соотношения (15) после замены в нем  $\alpha_1$  на  $\alpha_2$ , а  $\alpha_2$  - на  $-\alpha_1$ . Перейдем к доказательству тождества (15), подставив в его левую часть выражения (11). Тогда

$$\alpha_2 C^{(\pm j)} \mp \gamma_j B^{(\pm j)} = \frac{ig}{g_j} a \left( i\alpha_2 g_j^2 \frac{\lambda^2 + \gamma_j^2}{g} \pm \alpha_1 \gamma_j g_j \right).$$

Если выполнено тождество  $g_j^2 (\lambda^2 + \gamma_j^2) = g^2$  или в силу (9) тождество

$$g_j^2 k_j^2 = g^2, \quad (18)$$

то формула (15) справедлива. Воспользуемся тождеством  $f^2 + \frac{1}{4}a^2 = g + \frac{1}{2}a^2$ , тогда

$$\begin{aligned} g_j^2 k_j^2 &= \left( f^2 - af_j + \frac{1}{4}a^2 \right) \left( g + af_j + \frac{1}{2}a^2 \right) = \\ &= \left( g + \frac{1}{2}a^2 - af_j \right) \left( g + \frac{1}{2}a^2 + af_j \right) = \left( g + \frac{1}{2}a^2 \right)^2 - a^2 f^2 = g^2. \end{aligned}$$

Теперь из формул (15) – (17) и (13) следует утверждение (14).

**3. Базисные плоские электромагнитные поля.** Обезразмерим поле (10), разделив на  $-\lambda a k_j g_j$ . С учетом (9), (11) получим базисные поля в декартовых координатах, называемые плоскими полями в биизотропной среде:

$$\mathbf{K}^{(\mp j)}(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; \omega, \varepsilon, \mu, Z, G) = \frac{1}{k_j} \left[ \mp \frac{iv_j}{\lambda} \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_z - \frac{ig}{\lambda g_j} \mathbf{e}_1 \right] \Phi(\mp j), \quad (19)$$

где  $\mathbf{e}_1 = \alpha_2 \mathbf{e}_x - \alpha_1 \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_2 = \alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y$ ,  $\Phi(\mp j) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_j z)$ .

Введем базисные плоские поля для обычной среды [10], положив

$$\mathbf{W}_j^{(\mp 1)} = \mathbf{W}^{(\mp 1)}(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_j) = \frac{i}{\lambda} \mathbf{e}_1 \Phi(\mp j),$$

$$\mathbf{W}_j^{(\mp 2)} = \mathbf{W}^{(\mp 2)}(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_j) = \frac{1}{k_j} \left[ \mp \frac{iv_j}{\lambda} \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_z \right] \Phi(\mp j),$$

тогда  $\mathbf{K}^{(\mp j)} = \mathbf{W}_j^{(\mp 2)} - \frac{g}{k_j g_j} \mathbf{W}_j^{(\mp 1)}$ ,  $j = 1, 2$ .

**Лемма 2.** Имеет место соотношение

$$\text{rot } \mathbf{K}^{(\mp j)} = -\frac{g}{g_j} \mathbf{K}^{(\mp j)}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулами  $\text{rot } \mathbf{W}_j^{(\mp 1)} = k_j \mathbf{W}_j^{(\mp 2)}$ ,  $\text{rot } \mathbf{W}_j^{(\mp 2)} = k_j \mathbf{W}_j^{(\mp 1)}$  [10], формулой (18) и получим соотношение (20).

Построим базисные плоские электромагнитные поля в биизотропной среде, умножая (19) на амплитуду  $E_0$  с физической размерностью электрического поля. С учетом (12) и (14) получим  $E = E_0 K^{(\mp j)}$ ,  $H = E_0 p_j K^{(\mp j)}$ .

**4. Базисные сферические электромагнитные поля.** Обобщив предыдущий материал и результаты работ [8, 9], сформулируем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть поля  $W_j^{(1)}, W_j^{(2)} \in C^2(R^3)$  удовлетворяют условиям

$$\text{rot } W_j^{(1)} = k_j W_j^{(2)}, \text{rot } W_j^{(2)} = k_j W_j^{(1)}, \quad (21)$$

тогда поля

$$K^{(j)} = W_j^{(2)} - \frac{g}{k_j g_j} W_j^{(1)} \quad (22)$$

удовлетворяют волновому уравнению (4), а электромагнитные поля

$$E = E_0 K^{(j)}, \quad H = E_0 p_j K^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

уравнениям Максвелла (1).

**Доказательство.** Из (21) следуют соотношения  $\text{div } W_j^{(s)} = 0$ ,  $\Delta W_j^{(s)} + k_j^2 W_j^{(s)} = 0$ ,  $s = 1, 2$ , тогда  $\text{div } K^{(j)} = 0$ ,  $\Delta K^{(j)} + k_j^2 K^{(j)} = 0$ ,  $\text{rot } K^{(j)} = -\frac{g}{g_j} K^{(j)}$ .

Далее, после подстановки полей (22) в уравнение (4), а полей (23) - в (1) следуют утверждения теоремы.

Воспользуемся теоремой и рассмотрим последовательность полей в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ , которые удовлетворяют условиям (21) [10]:

$$W_j^{(1)} = m_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) = j_n(k_j r) T_{mn}(\theta, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \dots, \pm n;$$

$$W_j^{(2)} = n_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) = \frac{n(n+1)}{k_j r} j_n(k_j r) Y_n^m(\theta, \varphi) e_r + g_n(k_j r) \Pi_{mn}((\theta, \varphi)).$$

$$\text{Подставив преды } K_{mn}^{(j)} = n_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) - \frac{g}{k_j g_j} m_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j). \quad (24)$$

$$W_j^{(1)} = \tilde{m}_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) = h_n^{(1)}(k_j r) T_{mn}(\theta, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \dots, \pm n;$$

$$\text{Ана. } W_j^{(2)} = \tilde{n}_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) = \frac{n(n+1)}{k_j r} h_n^{(1)}(k_j r) Y_n^m(\theta, \varphi) e_r + g_n^{(1)}(k_j r) \Pi_{mn}((\theta, \varphi)),$$

получим последовательность полей

$$\tilde{K}_{mn}^{(j)} = \tilde{n}_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j) - \frac{g}{k_j g_j} \tilde{m}_{mn}(r, \theta, \varphi; k_j). \quad (25)$$

На основании формул (23) - (25) построим электромагнитные поля

$$E_{mn}^{(j)} = E_0 K_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi; \omega, \varepsilon, \mu, Z, G), \quad H_{mn}^{(j)} = E_0 p_j K_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi; \omega, \varepsilon, \mu, Z, G);$$

$$\tilde{E}_{mn}^{(j)} = E_0 \tilde{K}_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi; \omega, \varepsilon, \mu, Z, G), \quad \tilde{H}_{mn}^{(j)} = E_0 p_j \tilde{K}_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi; \omega, \varepsilon, \mu, Z, G),$$

которые будем называть базисными сферическими электромагнитными полями в биизотропной среде.

**5. Базисные цилиндрические электромагнитные поля.** Рассмотрим последовательность полей в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$ , которые удовлетворяют условиям (21) [10]:

$$W_j^{(1)} = U_m^{(1)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) = \left[ \frac{m}{v_j \rho} I_m(v_j \rho) e_\rho + i I'_m(v_j \rho) e_\varphi \right] e^{im\varphi + i\lambda z},$$

$$W_j^{(2)} = U_m^{(2)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) =$$

$$= \frac{i}{k_j} \left[ \lambda \left( \frac{m}{v_j \rho} I_m(v_j \rho) e_\varphi - i I'_m(v_j \rho) e_\rho \right) + v_j I_m(v_j \rho) e_z \right] e^{im\varphi + i\lambda z}, \quad (26)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $\lambda$  - произвольное комплексное число.

Подставив (26)  $K_m^{(j)}(\lambda) = U_m^{(2)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) - \frac{g}{k_j g_j} U_m^{(1)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j).$

Аналогично  $\tilde{K}_m^{(j)}(\lambda) = \tilde{U}_m^{(2)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) - \frac{g}{k_j \sigma} \tilde{U}_m^{(1)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j),$

$$\tilde{U}_m^{(1)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) = \left[ \frac{m}{v_j \rho} K_m(v_j \rho) e_\varphi + i K'_m(v_j \rho) e_\rho \right] e^{im\varphi + i\lambda z},$$

где

$$\tilde{U}_m^{(2)}(\rho, \varphi, z; \lambda, k_j) = \frac{i}{k_j} \left[ \lambda \left( \frac{m}{v_j \rho} K_m(v_j \rho) e_\varphi - i K'_m(v_j \rho) e_\rho \right) + v_j K_m(v_j \rho) e_z \right] e^{im\varphi + i\lambda z}.$$

На основании этих полей строятся электромагнитные поля

$$E_m^{(j)}(\lambda) = E_0 K_m^{(j)}(\lambda), \quad H_m^{(j)}(\lambda) = E_0 P_j K_m^{(j)}(\lambda),$$

называемые базисными цилиндрическими электромагнитными полями в биизотропной среде. Аналогично строится ряд других цилиндрических полей.

1. Виноградов А. П. Электродинамика композитных материалов. М., 2001.
2. Неганов В. А., Осипов О. В. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 3. С. 292.
3. Вытовтов К. А. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 5. С. 559.
4. Тютин А. В. // Там же. 2004. Т. 49. № 6. С. 697.
5. Фисанов В. В. // Там же. № 4. С. 454.
6. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
7. Аполлонский С. М., Ерофенко В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1999.
8. Третьяков С. К. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. Вып. 10. С. 1457.
9. Oksanen M. I., Tretyakov S. A., Lindell I. V. // J. electromagn. Waves Applicat. 1990. Vol. 4. № 7. P. 613.
10. Ерофенко В. Т., Кравченко В. Ф., Крючков А. Н. // Радиотехника. 1995. № 6. С. 49.

Поступила в редакцию 21.03.06.

**Виктор Тихонович Ерофенко** - доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.

**Джахангир Паша Тавакколи** - аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель - В. Т. Ерофенко.