

УДК 524.8

К.А. ВЕРЕНИЧ, В.Л. КАЛАШНИКОВ, С.Л. ЧЕРКАС

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЗАМКНУТОЙ КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Two approaches to quantization of the minisuperspace model of a closed Friedman Universe are compared. In the first one the Schrödinger normalization of the wave function of the Universe is used, and in the second one the wave function of the Universe is normalized in the style of the Klein - Gordon equation. The last approach allows constructing the time-dependent quasi-Heisenberg operators and finding their mean values. It is shown that the mean value of the Universe scale factor in this quasi-Heisenberg picture does not collapse to zero but tends to some constant value at the end of the Universe evolution. This value is close to that obtained in the first approach where any evolution in time is absent.

Объединение квантовой механики и гравитации входит в число самых важных задач современности и является одним из аспектов развития теории струн [1]. Квантовая гравитация необходима для описания ранней Вселенной, поскольку счи-

тается, что на временах Планка $\tau_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$ от «начала» Вселенная должна описываться квантовомеханически. Впервые канонический формализм, включающий волновую функцию Вселенной и ее конфигурационное пространство - суперпространство, был разработан более 40 лет назад [2, 3].

Сегодня, несмотря на успехи квантовой гравитации, по-прежнему остается множество проблем: отсутствие зависимости волновой функции от времени, трактовка волновой функции Вселенной и построение Гильбертова пространства для физических состояний.

Для замкнутой Вселенной, кроме этого, возникает проблема коллапса: как известно, достаточно массивные тела сжимаются под действием сил гравитации, в результате чего их плотность неограниченно возрастает. То же относится к замкнутой Вселенной, заполненной каким-либо видом материи. Существует мнение [4, 5], что квантовомеханическое описание должно включать решение проблемы коллапса, однако окончательного ответа на данный вопрос пока нет. Напротив, можно отметить, что коллапс приводит к дополнительным трудностям при квантовомеханическом описании, поскольку ассоциируется с потерей вероятности. Как будет видно далее, одним из способов избежать этого является допущение реколлапса, т. е. нового расширения системы после коллапса.

Нами рассмотрено решение двух проблем: времени и коллапса - на примере квантовомеханического описания замкнутой однородной изотропной Вселенной Фридмана в минисуперпространстве.

Эйнштейновское действие для гравитации и однокомпонентного вещественного скалярного поля [7], которое в данной модели представляет единственный вид материи, можно записать в виде

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right],$$

где R - скалярная кривизна [6], $g = \det|g_{\mu\nu}|$ - определитель ковариантного метрического тензора, $V(\varphi)$ - потенциал самодействия скалярного поля [7], включающий космологическую постоянную.

Ограничимся рассмотрением однородной изотропной Вселенной с метрикой:

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \quad (1)$$

где $N(t)$ - функция хода [8], описывающая свободу выбора параметризации времени, $a(t)$ - масштабный фактор Вселенной (расстояние между любыми двумя точками растет со временем согласно $r(t) = r_0 \cdot a(t)$, где r_0 задает некоторый масштаб расстояний).

Для ограниченной метрики (1) и замкнутой Вселенной действие принимает вид

$$S = \int N(t) \left\{ \frac{3}{8\pi G} \left(a - \frac{a\dot{a}^2}{N^2(t)} \right) + \frac{1}{2} a^3 \frac{\dot{\varphi}^2}{N^2(t)} - a^3 V(\varphi) \right\} dt.$$

Это действие может быть получено варьированием

$$S = \int \left\{ p_\varphi \dot{\varphi} - p_a \dot{a} - N(t) \left(-\frac{3a}{8\pi G} - \frac{8\pi G p_a^2}{12a} + \frac{p_\varphi^2}{2a^3} + a^3 V(\varphi) \right) \right\} dt \quad (2)$$

по p_a и p_φ , после чего импульсы, выраженные через скорости $p_\varphi = \frac{1}{N(t)} \dot{\varphi} a^3$ и

$p_a = \frac{3}{4\pi N(t)} a \dot{a}$, должны быть снова подставлены в (2).

Варьирование действия (2) по $N(t)$ приводит к равенству нулю гамильтониана системы

$$H = -\frac{3a}{8\pi G} - \frac{8\pi G p_a^2}{12a} + \frac{p_\varphi^2}{2a^3} + a^3 V(\varphi) = 0 \quad (3)$$

на классических траекториях ее движения.

Чтобы перейти от классической теории к квантовой, мы должны заменить классические импульсы соответствующими операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям $[\hat{p}_\varphi, \hat{\varphi}] = -i$, $[\hat{p}_a, \hat{a}] = i$, что может быть реализовано посредством $\hat{p}_\varphi = -i\partial/\partial\varphi$, $\hat{p}_a = i\partial/\partial a$.

Квантовым вариантом гамильтоновой связи $H=0$ является уравнение Уилера - де Витта $\hat{H}\psi = 0$ [2, 3], где ψ - волновая функция Вселенной. Как можно заметить, в гамильтониане (3) присутствуют некоммутирующие операторы $\hat{p}_a$ и $1/a$, и априори неясно, каким должно быть взаимное расположение операторов. Поскольку в данном случае мы хотим нормировать волновую функцию Вселенной в стиле

Шредингера $\int_0^\infty da \int_{-\infty}^\infty d\varphi \psi^* \psi = 1$, то упорядочение операторов выбирается такое, что-

бы волновая функция обращалась в ноль, когда масштабный фактор Вселенной равен нулю или бесконечности. Таким образом, уравнение Уилера - де Витта имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - a + a^3 V(\varphi) \right) \psi(a, \varphi) = 0, \quad (4)$$

где приняты планковские единицы измерения $4\pi G/3=1$

Далее везде для простоты будем полагать $V(\varphi)=0$, что позволит записать решение уравнения (4) с помощью метода разделения переменных:

$$\psi_k(a, \varphi) = \sqrt{a} K_{\sqrt{1/16-k^2/4}}(a^2/2) e^{ik\varphi},$$

где $K_\lambda(z)$ - модифицированная функция Бесселя [9]. Наконец, нормированное решение уравнения (4) представляется в виде волнового пакета

$\psi(a, \varphi) = C \int_{-\infty}^\infty \psi_k(a, \varphi) c(k) dk$, где C - нормировочный множитель.

При малых a функция $\psi_k(a, \varphi)$ имеет асимптотику $\psi_k \sim a^{\frac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2}}$ и обращается в ноль при $a=0$, только если $k \neq 0$. Это означает, что для конструирования волновых пакетов должны использоваться $c(k)$, обращающиеся в ноль при $k=0$, например $c(k) = k^2 e^{-k^2}$. Как мы видим, данная картина соответствует полностью статической Вселенной с некоторым распределением масштабного фактора и амплитуды скалярного поля. Этот парадоксальный вывод (притом что в настоящее время мы живем в расширяющейся Вселенной) вызывает оживленные дискуссии [10-12]. Разумеется, временная эволюция также будет отсутствовать, если проводить рассмотрение в Гейзенберговой картине. К примеру, домножим уравнение (4) на a

и будем рассматривать оператор $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - a^2 \right)$ как гамильтониан системы. Несмотря на то, что можно построить нетривиальные Гейзенберговы операторы $\hat{A}(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{A} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}$, их средние значения не эволюционируют со временем. Действительно, для среднего значения производной имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle &= i \langle \psi | (\hat{\mathcal{H}} \hat{A} - \hat{A} \hat{\mathcal{H}}) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\mathcal{H}} \hat{A} | \psi \rangle = \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\hat{\mathcal{H}}^+ \psi)^*(a, \varphi) \hat{A} \psi(a, \varphi) d\varphi da = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\hat{\mathcal{H}} \psi(a, \varphi))^* \hat{A} \psi(a, \varphi) d\varphi da = 0. \end{aligned}$$

Существенным здесь является то, что мы можем перебрасывать содержащиеся в гамильтониане операторы дифференцирования налево с помощью интегрирования по частям, поскольку волновая функция обращается в ноль на пределах интегрирования.

Предположим теперь, что поскольку уравнение Уилера - де Витта похоже на уравнение Клейна - Гордона, то волновая функция также должна быть нормирована в стиле Клейна - Гордона. В этом случае естественно выбирать упорядочение операторов в виде лапласиана

$$\left(\frac{1}{2a^2} \frac{\partial}{\partial a} a \frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{2a^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{a}{2} \right) \psi = 0$$

так, чтобы асимптотика решения при малых a была подобна плоской волне: $\psi_k(a, \varphi) = a^{\pm i|k|} e^{ik\varphi}$. Нормировка решений в стиле Клейна - Гордона выглядит следующим образом [4, 10, 12-14]:

$$\langle \psi, \psi \rangle = ia \int (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial a} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial a}) \Big|_{a=0} d\varphi = 1,$$

где интегрирование ведется по переменной φ в плоскости $a=0$. При этом функция ψ должна быть построена в виде волнового пакета из отрицательно-частотных решений $\sim a^{-i|k|} e^{ik\varphi}$:

$$\psi(a, \varphi) = \int \psi_k(a, \varphi) c(k) dk.$$

Поскольку теперь волновая функция неограниченна по a , то отсутствие временной эволюции в Гейзенберговой картине не может быть доказано упомянутым способом, что дает возможность предположить существование некоторой зависящей от времени картины (подобной картине Гейзенберга), которая соответствует нормировке волновой функции в стиле Клейна - Гордона. Такая картина, состоящая в квантовании уравнений движения, предложена в [13, 14], где постулируются дираковские коммутационные соотношения для квазигейзенберговых операторов в начальный момент времени $t = 0$. Согласно [13, 14] операторные уравнения движения

* Данные уравнения выглядят так же, как и в классической теории. Таким образом, для «узких» волновых пакетов эволюция средних значений совпадает с тем, что может быть получено в классике.

$$\ddot{\hat{a}} = -\frac{\dot{\hat{a}}^2}{2\hat{a}} - \frac{3\hat{p}_\varphi^2}{2\hat{a}^3} - \frac{1}{2\hat{a}}, \quad \dot{\hat{a}} = \frac{\hat{p}_a}{\hat{a}}, \quad \dot{\hat{\varphi}} = \frac{\hat{p}_\varphi}{\hat{a}^3}, \quad \dot{\hat{p}}_\varphi = 0 \quad (5)$$

должны быть решены с удовлетворяющими гамильтоновой связи начальными условиями $\hat{a}(0) = \text{const} = a$, $\hat{\varphi}(0) = \varphi$,

$$\hat{p}_a(0) = \frac{|\hat{p}_\varphi|}{a}, \quad \hat{p}_\varphi(0) = \hat{p}_\varphi, \quad \text{где } \hat{p}_\varphi = -i\partial/\partial\varphi.$$

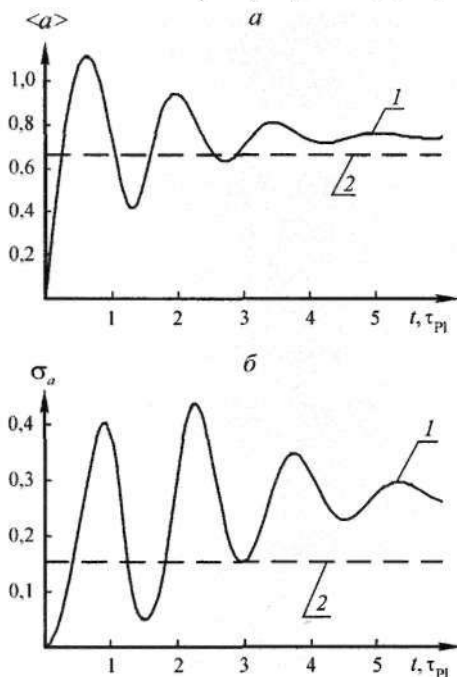
Решение уравнений движения лучше всего искать в импульсном представлении переменной φ , где $\hat{p}_\varphi = k$, $\hat{\varphi} = i\frac{\partial}{\partial k}$. Окончательно, если положить $\hat{a}(0) = \text{const} = 0$, то решение уравнений движения (5) для $\hat{a}(t)$ находится в параметрической форме:

$$a(\eta, k) = k^{1/2} \sqrt{\frac{1 - \cos(4\eta)}{2}}, \quad (6)$$

$$t(\eta, k) = 2^{\frac{9}{4}} \sqrt{k} \int_0^{4\eta} (1 - \cos(\xi))^{\frac{1}{4}} d\xi.$$

В импульсном представлении формула для вычисления средних значений операторов [13, 14], выведенная из нормировки волновой функции Вселенной в стиле Клейна - Гордона, выглядит подобно обычной квантовой механике:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \int a^{i|k|} c^*(k) \hat{A}(k, a, t) a^{-i|k|} c(k) \Big|_{a \rightarrow 0} dk. \quad (7)$$



Эволюция среднего значения масштабного фактора (а) и его дисперсии (б), рассчитанная в квазигейзенберговой картине (1). Штриховыми линиями (2) указаны статистические значения, соответствующие нормировке волновой функции по Шредингеру

С помощью (6), (7) мы можем вычислить среднее значение масштабного фактора Вселенной и его дисперсию, например, для состояния Вселенной, задаваемого волновым пакетом $c(k) = k^2 e^{-k^2}$.

Результаты расчета представлены на рисунке. Как мы видим, среднее значение масштабного фактора после расширения начинает уменьшаться на стадии коллапса. Однако из рисунка (кривая 1) видно, что это значение не обращается в ноль. Последующий коллапс имеет меньшую амплитуду, и в итоге эволюция масштабного фактора затухает. Интересно, что асимптотическое значение, к которому приходит масштабный фактор, близко к найденному в полностью статической Шредингеровской картине (в расчетах использовался один и тот же волновой пакет).

Отметим, что в нашей модельной задаче эволюция Вселенной заканчивается на планковских временах. В принципе расширение может быть увеличено, если задать волновой пакет с большей кинетической энергией, однако в настоящее время считается, что

экспоненциальное расширение Вселенной возникает из-за потенциала скалярного поля. Согласно [7] существует множество Вселенных, в которых начальное значение скалярного поля распределено некоторым образом. Вселенные, в которых величина поля достаточна для быстрого расширения (инфляции), эволюционируют подобно нашей Вселенной, в то время как Вселенные с малым значением скалярного поля коллапсируют. В этом смысле можно считать, что в данной работе описывается судьба таких «неразвившихся» Вселенных, которые после нескольких коллапсов и реколлапсов переходят в статическое состояние, трактуемое как исчезновение времени.

Для описания реальной Вселенной необходимо квантовое рассмотрение инфляции, т. е. потенциала скалярного поля, который полагался нами равным нулю. Решение операторных уравнений движения в этом случае сильно усложнится. Однако имеется также и принципиальная проблема. Согласно [13] на временах $t \sim 1/m$ в момент рождения частиц материи (m - их характерная масса) происходит процесс «самоизмерения», когда масштабный фактор проецируется к разным значениям в разных пространственных областях, дальнейшую эволюцию которых можно описывать классически. Современная Вселенная представляет собой одну из таких расширившихся областей. Проблема состоит в том, что для описания процесса «самоизмерения» пространственно однородной модели недостаточно.

Таким образом, в квазигейзенберговой картине мы описали квантовую эволюцию однородной замкнутой Вселенной, заключающуюся в постепенном затухании коллапсов, причем среднее значение масштабного фактора не обращается в ноль.

Интересно отметить также появление стрелы времени (см. в этой связи [15]) в квазигейзенберговой картине замкнутой Вселенной, направленной в сторону затухания эволюции к статическому миру. Данная стрела времени возникла как результат соединения гравитации и квантовой механики. Напомним, что в эволюции классической замкнутой Вселенной стрела времени отсутствует, поскольку коллапсы и реколлапсы симметричны относительно замены t на $-t$. Стрела времени отсутствует также и в квантовой механике, т. е. в уравнении Шредингера, поскольку после замены t на $-t$ и комплексного сопряжения уравнение Шредингера переходит само в себя.

1. Каку М. Введение в теорию суперструн. М., 1991. С. 6.
2. Wheeler J. A. // Battelle Rencontres / Eds. B. DeWitt, J.A. Wheeler. New York, 1968. P. 242.
3. DeWitt B. S. // Phys. Rev. 1967. Vol. 160. P. 1113.
4. Mostafazadeh A. // Annals Phys. 2004. Vol. 309. P. 45; arXiv:gr-qc/0306003.
5. Guendelman E., Kaganovich A. // Int. J. Mod. Phys. 1993. Vol. D2. P. 225; arXiv: gr-qc/0302063.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988. С. 339.
7. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., 1990. С. 57.
8. Альтшулер Б.Л., Барвинский А.О. // УФН. 1996. Т. 166. С. 490.
9. Градштейн И. С., Рыжик И.М. Таблицы рядов интегралов и сумм. М., 1962. С. 965.
10. Vilenkin A. // Phys. Rev. 1989. Vol. 39. P. 1116.
11. Isham C.J., Butterfield J. // arXiv: gr-qc/9901024.
12. Shestakova T. P., Simeonov C. // Grav. Cosmol. 2004. Vol. 10. P. 161; Ibid. 2004. Vol. 10. P. 257.
13. Cherkas S.L., Kalashnikov V. L. // arXiv: gr-qc/0512107.
14. Cherkas S.L., Kalashnikov V. L. // Grav. Cosmol. 2006. Vol. 12. P. 126.
15. Kiefer C., Zeh H. D. // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 51. P. 4145.

Поступила в редакцию 14.12.06.

Кирилл Андреевич Верещич - студент 4-го курса физического факультета.

Владимир Леонидович Калашников - кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института фотоники Венского технического университета.

Сергей Леонидович Черкас - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ ядерных проблем БГУ.

* Отметим, что стрелу времени необязательно соотносить с (не)инвариантностью уравнений относительно $t \rightarrow -t$. В статистической физике и нелинейной динамике достаточно общие начальные условия дают вполне характерную асимптотику во времени, что также можно назвать стрелой времени.