УДК 519.8

С.Е. БУХТОЯРОВ

О СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С МАЖОРИТАРНЫМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

A vector linear combinatorial problem with majority principle of optimality is considered. Lower and upper attainable estimates of strong stability radius are obtained.

Изучению различных аспектов устойчивости векторных дискретных задач с мажоритарным принципом оптимальности посвящен ряд публикаций [1-5]. Настоящая статья продолжает начатое в [6-10] исследование сильной устойчивости траекторных задач оптимизации при линейных частных критериях и рассматривает случай мажоритарного отношения доминирования на множестве траекторий. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса сильной устойчивости такой задачи.

Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T \subseteq 2^E$, $|T| \geq 2$, конечного множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m \geq 2$, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n)) \to \min_{t \in T}$$

с частными критериями вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n,$$

где $N(t) = \{j \in N_n : e_j \in t\}, N_n = \{1, 2, ..., n\}, n \geq 1, A_i$ - i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$. Будем полагать, что $f_i(\varnothing, A_i) = 0$.

На множестве траекторий T зададим мажоритарное отношение строгого предпочтения:

$$t' \underset{A}{\prec} t \quad \Leftrightarrow \quad [t, t', A]_+ > [t, t', A]_-,$$

где

$$[t, t', A]_+ = |\{i \in N_n : \tau_i(t, t', A_i) > 0\}|,$$
$$[t, t', A]_- = |\{i \in N_n : \tau_i(t, t', A_i) < 0\}|,$$
$$\tau_i(t, t', A_i) = f_i(t, A_i) - f_i(t', A_i), \quad i \in N_n.$$

Тем самым траектория t' предпочтительнее траектории t по бинарному отношению $\underset{A}{\prec}$ в том и только в том случае, когда число компонент, по которым вектор $f(t', A)$ «лучше» вектора $f(t,A)$, больше числа компонент, по которым $f(t, A)$ «лучше» $f(t', A)$. Таким образом, бинарное отношение $\underset{A}{\prec}$ реализует известную процедуру принятия решений большинством голосов.

Далее будем рассматривать векторную задачу $Z^n(A)$ поиска множества мажоритарно эффективных траекторий $M^n(A)$, которое определим следующим образом:

$$M^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \quad (t' \overline{\underset{A}{\prec}} t)\},$$

где $\overline{\underset{A}{\prec}}$ - отрицание отношения $\underset{A}{\prec}$. Ясно, что в частном случае, когда число критериев $n = 1$, множество мажоритарно эффективных траекторий становится множеством оптимальных траекторий $M^1(A), A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m})$, а наша задача - линейной скалярной траекторной задачей, в схему которой вкладываются многие задачи комбинаторной оптимизации. При $n = 2$ множество $M^n(A)$ совпадает с множеством Парето (множеством эффективных траекторий) и не пусто. Однако при $n \geq 3$ бинарное отношение $\underset{A}{\prec}$ не всегда транзитивно, и поэтому множество $M^n(A)$ может оказаться пустым. Этим можно объяснить известный парадокс голосования М. Кондорсе [11] (см. также [12,13]).

В последующем будем считать, что $M^n(A) \neq \varnothing$, и использовать обозначение $\lceil \frac{n}{2} \rceil = k$, т. е. k - наименьшее целое число, большее либо равное $\frac{n}{2}$.

Свойство 1. Если траектории $t, t' \in T$ и матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ таковы, что $[t, t', A]_+ \geq n - k + 1$, то $t' \underset{A}{\prec} t$.

Свойство 2. Если траектории $t, t' \in T$ и матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ таковы, что $[t, t', A]_- \geq k$, то $t' \overline{\underset{A}{\prec}} t$.

Для любого натурального числа q в пространстве $\mathbf{R}^q$ зададим норму l_∞:

$$\| z \| = \max_{i \in N_q} | z_i |, \quad z = (z_1, z_2, ..., z_q) \in \mathbf{R}^q.$$

Под нормой $\| A \|$ матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ будем понимать норму вектора $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn-1}, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{mn}$.

Возмущения параметров задачи будем осуществлять путем сложения матрицы A с матрицами множества

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \{A' \in \mathbf{R}^{n\times m} : \| A' \| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Матрицу $A' \in \mathcal{A}(\varepsilon)$ будем называть возмущающей.

По аналогии с [7-9] радиусом сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$ назовем число

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup \Xi(A), & \text{если } \Xi(A) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi(A) = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi(A) = \{\varepsilon > 0 : \forall A' \in A(\varepsilon)\big(M^n(A+A') \cap M^n(A)\big) \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, радиус сильной устойчивости задает предельный уровень независимых возмущений параметров задачи, для каждого из которых существует хотя бы одна траектория, сохраняющая мажоритарную эффективность.

Положим

$$\gamma_i(t,t',A_i) = -\frac{\tau_i(t,t',A_i)}{\Delta(t,t')}, \quad i \in N_n,$$

где $\Delta(t,\ t') = |(t \cup t') \setminus (t' \cap t)|$.

Свойство 3. Если $\gamma_i(t,t',A_i) \geq \varphi > 0$, то для всякой матрицы $A' \in \mathcal{A}(\varphi)$ имеем

$$\tau_i(t,\ t',\ A_i + A_i') < 0.$$

Действительно, для любой матрицы $A' = [a_{ij}'] \in \mathcal{A}(\varphi)$ легко выводим

$$\tau_i(t,t',\ A_i') = \sum_{j \in N((t\cup t')\setminus(t'\cap t))} |a_{ij}'| \leq \| A' \| \Delta(t,\ t') < \gamma_i(t,\ t',\ A_i)\Delta(t,\ t') = -\tau_i(t,\ t',\ A_i).$$

Отсюда с учетом линейности функции $\tau_i(t,\ t',\ A_i)$ получаем

$$\tau_i(t,\ t',\ A_i + A_i') = \tau_i(t,\ t',\ A_i) + \tau_i(t,\ t',\ A_i') < 0.$$

Пусть $t \in M^n(A),\ t' \neq t,\ t' \in T$. Все числа $\tau_i(t,\ t',\ A_i),\ i \in N_n$, упорядочим

следующим образом:

$$\tau_{p_1}(t,\ t',\ A_{p_1}) \leq \tau_{p_2}(t,\ t',\ A_{p_2}) \leq \ldots \leq \tau_{p_n}(t,\ t',\ A_{p_n}), \tag{1}$$

т. е.

$$\gamma_{p_1}(t,\ t',\ A_{p_1}) \geq \gamma_{p_2}(t,\ t',\ A_{p_2}) \geq \ldots \geq \gamma_{p_n}(t,\ t',\ A_{p_n}). \tag{2}$$

Введем обозначени

$$\varphi_1^n(A) = \max_{t \in M^n(A)} \min_{t' \in T\setminus\{t\}} \gamma_{p_k}(t,\ t',\ A_{p_k}),$$

$$\varphi_2^n(A) = \min_{t' \in \overline{M^n(A)}} \max_{t \in M^n(A)} \gamma_{p_k}(t,\ t',\ A_{p_k}),$$

где $\overline{M^n(A)} = T \setminus M^n(A)$. Легко проверить, что $\varphi_i^n(A) \geq 0, i = 1,2$.

Теорема. *Для радиуса сильной устойчивости* $\rho^n(A)$ *задачи* $Z^n(A),\ n \geq 1$, *справедливо неравенств* $\varphi_1^n(A) \leq \rho^n(A)$, *а в случае, когда* $\overline{M^n(A)} \neq \varnothing,\ \rho^n(A) \leq \varphi_2^n(A)$.

Доказательство. Сначала докажем справедливость неравенства $\boldsymbol{\rho^n(A) \geq \varphi_1 := \varphi_1^n(A)}$. Будем предполагать, что $\varphi_1 > 0$ (в случае $\boldsymbol{\varphi_1} = 0$ неравенство $\rho^n(A) \geq \varphi_1$ очевидно). Согласно определению числа $\boldsymbol{\varphi_1}$ существует такая траектория $t \in M^n(A)$, что для любой траектории $t' \in T \setminus \{t\}$ справедливо неравенство $\gamma_{p_k}(t,\ t',\ A_{p_k}) \geq \varphi_1$. Отсюда, воспользовавшись неравенствами (1), (2) и свойством 3, получим, что для любой матрицы $A' \in \mathcal{A}(\varphi_1)$ верны неравенства

$$\tau_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i} + A_{p_i}') < 0, \quad i \in N_k.$$

Поэтому $[t,\ t',\ A+A']_- \geq k$. Тогда, учитывая свойство 2, приходим к соотношению $t' \underset{A+A'}{\overline{\prec}} t$. Резюмируя, заключаем, что существует такая траектория $t \in M^n(A)$, что $t \in M^n(A+A')$ для любой матрицы $A' \in \mathcal{A}(\varphi_1)$. Следовательно, $\rho^n(A) \geq \varphi_1$

Теперь покажем справедливость верхней оценки числа $\rho^n(A)$ в случае, когда $\overline{M^n}(A) \neq \varnothing$.

Из определения числа $\varphi_2 := \varphi_2^n(A)$ следует существование такой траектории $t' \in \overline{M^n}(A)$, что для любой траектории $t \in M^n(A)$ и любого индекса $i \in \{k, k+1,\ \ldots,\ n\}$ справедливо неравенство

$$\varphi_2 \geq \gamma_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i}). \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon > \alpha > \varphi_2$. Тогда, построив возмущающую матрицу $A^* = [a_{ij}^*]_{n\times m} \in \mathcal{A}(\varepsilon)$ по правилу

$$a_{ij}^* = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t'), \\ \alpha, & \text{если } i \in N_n, j \in N_n \setminus N(t'), \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и учитывая (3), получаем, что для всякого индекса $i \in \{k,\ k+1,\ \ldots,\ n\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \tau_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i} + A_{p_i}^*) &= \tau_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i}) + \tau_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i}^*) = \\ &= -\gamma_{p_i}(t,\ t', A_{p_i})\Delta(t,\ t') + \alpha\Delta(t,\ t') = \\ &= (\alpha - \gamma_{p_i}(t,\ t',\ A_{p_i}))\Delta(t,\ t') > 0, \end{aligned}$$

которые дают неравенство $[t,\ t',\ A+A^*]_+ \geq n-k+1$. Поэтому в силу свойства 1 будем иметь $t' \underset{A+A^*}{\prec} t$, и, следовательно, $t \notin M^n(A+A^*)$. Таким образом, для всякого числа $\varepsilon > \varphi_2$ существует такая матрица $A^* \in \mathcal{A}(\varepsilon)$, что

$$M^n(A+A^*) \cap M^n(A) = \varnothing,$$

т. е. $\rho^n(A) \leq \varphi_2$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $M^n(A) = \{t^0\}$, *то для радиуса сильной устойчивости задачи* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *справедлива формула*

$$\rho^n(A) = \varphi_1^n(A) = \varphi_2^n(A) = \min_{t' \in T \setminus \{t^0\}} \gamma_{p_k}(t^0,\ t',\ A).$$

Тем самым нижняя и верхняя оценки $\varphi_1^n(A)$ и $\varphi_2^n(A)$ радиуса сильной устойчивости достижимы.

Задачу $Z^n(A)$ назовем сильно устойчивой, если $\rho^n(A) > 0$

Обозначим

$$S^n(A) = \{t \in M^n(A) : \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad [t,\ t', A]_- \geq k\}.$$

Если $S^n(A) \neq \varnothing$, то существует такая траектория $t \in M^n(A)$, что для всех $t' \in T \setminus \{t\}$ $\gamma_{p_k}(t,\ t',\ A_{p_k}) > 0$. Поэтому имеет место

Следствие 2. Если $S^n(A) \neq \varnothing$, *то задача* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *сильно устойчива.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, о чем свидетельствует следующий

Пример. Пусть $n = m = 3, E = \{e_1, e_2, e_3\}, T = \{t_1, t_2, t_3\}, t_i = \{e_i\}, i \in N_3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда $M^3(A) = \{t_1, t_2\}, S^3(A) = \varnothing$. В то же время несложно убедиться, что $\rho^n(A) = \frac{1}{2}$, т. е. задача сильно устойчива.

1. Emelichev V.A., Stepanishina Yu.V. // Computer Science Journal of Moldova. 1999. Vol. 7. №2. P. 291.
2. Емеличев В.А., Степанишина Ю. В. // Кибернетика и систем, анализ. 2001. № 5. С. 63.
3. Емеличев В.А., Степанишина Ю. В. // Мат. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 38.
4. Степанишина Ю. В.//Вестн. БГУ. Сер. 1.2002.№2.С. 104.
5. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю. В.// Кибернетика и систем. анализ. 2003. № 4. С. 155.
6. Леонтьев В. К. // Пробл. кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.
7. Емеличев В.А., Бердышева Р. А.// Дискрет, мат. 1998. Т. 10. Вып. 3. С. 3.
8. Емеличев В.А., Никулин Ю. В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2000. № 1. С. 47.
9. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D.P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.
Ю. Емеличев В.А., Кузьмы К. Г. // Информатика. 2005. № 1. С. 16.
11. Condorset Marauis de. Essai sur Г application de Г analyse *a* la probabilite des decisions rendues *a* la pluralite des voix. Paris, 1785.
12. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. М., 1991.
13. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М., 1991.

Поступила в редакцию 14.03.06.

Сергей Евгеньевич Бухтояров - аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.А. Емеличев.