

УДК 512.54

И.А. ПОГОРЕЦКИЙ

АНАЛОГ ПОНЯТИЯ ТОЖДЕСТВЕННОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТЕОРИИ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

The introduced here term of the e -identity allowed to define formations of finite groups by analogy with abstract varieties: as classes of finite groups which satisfy sets of identity relations (e -identities). Thereupon characteristic subgroups of free profinite group of infinity rank play the role of verbal subgroups for formations.

Формации конечных групп и многообразия бесконечных групп определяются схожим образом, однако теории этих классов совершенно различны. Результаты, полученные в [1], позволяют перенести на теорию формаций идеологию теории многообразий. В данной работе это осуществляется относительно понятия тождественного соотношения - основополагающего в теории многообразий.

Зафиксируем счетный алфавит $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и символом F_∞ обозначим свободную проконечную группу над X .

Определение 1. Элемент $w \in F_\infty$ называется e -тождеством конечной группы G , если $\varphi(w) = 1$ для любого непрерывного эпиморфизма $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow G$.

Теорема 1. Пусть W — некоторое подмножество F_∞ . Множества конечных групп, для которых каждый $w \in W$ элемент является e -тождеством, образуют формацию. При этом каждая $\mathfrak{F}$ формация может быть таким образом определена множеством тех $w \in F_\infty$, которые являются e -тождествами во всех группах из $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{F}$ множество всех конечных групп, для которых W - e -тождества. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Покажем, что для произвольного эпиморфизма $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow G/N$ существует эпиморфизм $\psi: F_\infty \twoheadrightarrow G$ такой, что $\varphi = \xi \circ \psi$, где ξ - канонический эпиморфизм $G \twoheadrightarrow G/N$. Пусть $X_0 = X \setminus \varphi^{-1}(N)$.

В силу непрерывности φ множество X_0 конечно, причем $\varphi(X_0) = \{g_1N, g_2N, \dots, g_kN \mid g_i \in G\}$ порождает G/N . Так как множество $X \setminus X_0$ счетно, то в нем найдется подмножество X_1 такое, что $|X_1| = \text{rank}(N)$. Пусть $\psi: F_\infty \rightarrow G$ - гомоморфизм, продолжающий следующее сходящееся отображение множества X в G : $X_0 \rightarrow G: x_i \rightarrow g_i$, X_1 на равномошную систему образующих группы N и $X \setminus (X_0 \cup X_1) \rightarrow 1$. Легко видеть, что ψ - непрерывный эпиморфизм и что $\varphi = \xi \circ \psi$. Следовательно, $\varphi(W) = \xi \circ \psi(W) = N$. В силу произвольности φ заключаем, что W - е-тождества G/N , поэтому $\mathfrak{K}$ замкнуто относительно образования фактор-групп. Пусть теперь $M \triangleleft G$ и $G/N, G/M \in \mathfrak{K}$. Тогда, продолжая канонически произвольный эпиморфизм $\varphi: F_\infty \rightarrow G/(M \cap N)$ до эпиморфизма $\varphi_N: F_\infty \rightarrow G/(M \cap N) \twoheadrightarrow G/N$, получаем, что $\varphi_N(W) = 1$, поэтому $\varphi(W) \subset N/(M \cap N)$ и аналогично $\varphi(W) \subset M/(M \cap N)$, следовательно, $\varphi(W) = M \cap N$, откуда в силу произвольности φ имеем $G/(M \cap N) \in \mathfrak{K}$. Тем самым мы показали, что $\mathfrak{K}$ - формация.

Обратно, пусть $\mathfrak{K}$ - формация конечных групп. Обозначим $\mathfrak{K}(F_\infty) = \bigcap \{N \triangleleft F_\infty \mid F_\infty/N \in \mathfrak{K}\}$ и покажем, что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - е-тождества, определяющие $\mathfrak{K}$. Из определения $\mathfrak{K}(F_\infty)$ ясно, что для любого эпиморфизма $\varphi: F_\infty \rightarrow G \in \mathfrak{K}$ ядро $\text{Ker}(\varphi)$ содержит $\mathfrak{K}(F_\infty)$. Поэтому все группы формации $\mathfrak{K}$ удовлетворяют е-тождествам $\mathfrak{K}(F_\infty)$. Обратно, пусть G - конечная группа и $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow G$ - эпиморфизм, который существует в силу свободы F_∞ . Тогда, если G удовлетворяет е-тождествам $\mathfrak{K}(F_\infty)$, то снова $\text{Ker}(\varphi) \supset \mathfrak{K}(F_\infty)$. Так как $\text{Ker}(\varphi)$ открыто, а F_∞ - компактна, то $\text{Ker}(\varphi) \supseteq \bigcap_{i=1}^k N_i$, где $F/N_i \in \mathfrak{K}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, $G \cong F_\infty / \text{Ker}(\varphi)$ - фактор-группа поддекартоваго произведения групп $F_\infty / N_i \in \mathfrak{K}$, откуда $G \in \mathfrak{K}$. Теорема доказана.

Таким образом, формации конечных групп можно понимать как классы конечных групп, определенные множествами е-тождеств.

Для произвольной формации $\mathfrak{K}$ и проконечной группы G будем обозначать $\mathfrak{K}(G) = \bigcap \{N \mid N \triangleleft G, G/N \in \mathfrak{K}\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ есть пересечение ядер $\text{Ker}(\varphi)$ всех эпиморфизмов $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow G$, где $G \in \mathfrak{K}$.

Из предыдущего доказательства следует, что формация $\mathfrak{K}$ определяется е-тождествами $\mathfrak{K}(F_\infty)$ и что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - множество всех е-тождеств, одновременно выполненных во всех группах формации $\mathfrak{K}$. Из [1] следует также, что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - характеристическая подгруппа F_∞ .

Предложение 1. Соответствие $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}(F_\infty)$ между формациями конечных групп и характеристическими подгруппами F_∞ взаимно однозначное.

Доказательство. Данное соответствие инъективно, поскольку формация $\mathfrak{K}$ состоит из всех конечных групп, удовлетворяющих е-тождествам $\mathfrak{K}(F_\infty)$. По теореме 3 из [1] любая характеристическая подгруппа группы F_∞ имеет вид $\mathfrak{K}(F_\infty)$ для некоторой формации $\mathfrak{K}$, откуда следует сюръективность.

Проводя аналогию с абстрактными многообразиями, можно сказать, что для формаций конечных групп характеристические подгруппы F_∞ играют роль вербальных групп.

Определение 2. Элемент $v \in F_\infty$ назовем *e-следствием* подмножества $W \subseteq F_\infty$, если v является *e-тождеством* во всех конечных группах, в которых *e-тождествами* оказываются все $w \in W$.

Теорема 2. Пусть $W \subseteq F_\infty$. Тогда множеством всех *e-следствий* W является наименьшая замкнутая характеристическая подгруппа F_∞ , содержащая W .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ - множество всех конечных групп, в которых выполнены *e-тождества* W . По теореме 1 $\mathfrak{K}$ - формация. Ясно, что множеством всех *e-следствий* W являются *e-тождества* формации $\mathfrak{K}$, а именно $\mathfrak{K}(F_\infty)$. Пусть H - наименьшая замкнутая характеристическая подгруппа F_∞ , содержащая W . Тогда H топологически порождается множеством $\{\sigma(W) \mid \sigma \in \text{Aut}(F_\infty)\}$. Покажем, что $\mathfrak{K}(F_\infty) = H$.

Согласно теореме 3 из [1] существует формация $\mathfrak{K}_1$ такая, что $\mathfrak{K}_1(F_\infty) = H$. Заметим, что для любого непрерывного эпиморфизма $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow G \in \mathfrak{K}$ и для любого $\sigma \in \text{Aut}(F_\infty)$ имеем $\varphi(\sigma(W)) = \varphi \circ \sigma(W) = 1$, откуда $\varphi(H) = 1$. Следовательно, группы формации $\mathfrak{K}$ удовлетворяют *e-тождествам* H и поэтому $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_1$. Так как $W \subseteq H$, то группы формации $\mathfrak{K}_1$ удовлетворяют *e-тождествам* W , откуда $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$. Получаем, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$, и в силу предложения 1 $\mathfrak{K}(F_\infty) = \mathfrak{K}_1(F_\infty) = H$. Следовательно, H - все *e-следствия* W , что и требовалось доказать.

Отметим, что если формации $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ определены *e-тождествами* W_1 и W_2 соответственно, то из $W_1 \subseteq W_2$ следует $\mathfrak{K}_1 \supseteq \mathfrak{K}_2$. По аналогии с [2] введем понятие *базы e-тождеств* формации $\mathfrak{K}$ как такое подмножество F_∞ , которое определяет $\mathfrak{K}$ в смысле теоремы 1.

Предложение 2. Формация конечных групп $\mathfrak{K}$ замкнута относительно подгрупп тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}(F_\infty)$ — вполне характеристическая подгруппа F_∞ .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ замкнута относительно подгрупп и $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow H < F_\infty$ - непрерывный эндоморфизм группы F_∞ , где $H = \text{Im } \varphi$. Если $N \triangleleft H$ и $H/N \in \mathfrak{K}$, то $H/N \cong F_\infty / \varphi^{-1}(N) \in \mathfrak{K}$, что означает $\mathfrak{K}(F_\infty) \subseteq \varphi^{-1}(N)$, или $\varphi(\mathfrak{K}(F_\infty)) \subseteq N$. Пересекая по всем $N \triangleleft H$ таким, что $H/N \in \mathfrak{K}$, получаем $\varphi(\mathfrak{K}(F_\infty)) \subseteq \mathfrak{K}(H)$. Если теперь $F_\infty / K \in \mathfrak{K}$, то, так как $\mathfrak{K}$ замкнуто относительно подгрупп, $H / H \cap K \in \mathfrak{K}$, что влечет $\mathfrak{K}(H) \subseteq H \cap K$. Пересекая по всем K таким, что $F_\infty / K \in \mathfrak{K}$, получаем $\mathfrak{K}(H) \subseteq H \cap \mathfrak{K}(F_\infty)$. В итоге $\varphi(\mathfrak{K}(F_\infty)) \subseteq \mathfrak{K}(H) \subseteq \mathfrak{K}(F_\infty)$. Следовательно, $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - вполне характеристическая подгруппа F_∞ .

Обратно, пусть $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - вполне характеристическая подгруппа F_∞ и $H \leq G \in \mathfrak{K}$. Тогда $G \cong F_\infty / N$ и $H \cong M / N$ для некоторых $N \triangleleft F_\infty$ и $M \leq F_\infty$, причем $\mathfrak{K}(F_\infty) \subseteq N$. Кроме того, произвольный эпиморфизм $\varphi: F_\infty \twoheadrightarrow M$ индуцирует изоморфизм $F_\infty / \varphi^{-1}(N) \cong M / N$. Так как $\varphi(\mathfrak{K}(F_\infty)) \subseteq \mathfrak{K}(F_\infty) \subseteq N$, то $\mathfrak{K}(F_\infty) \subseteq \varphi^{-1}(N)$. Поскольку $\varphi^{-1}(N)$ открыто в F_∞ , то $\varphi^{-1}(N) \supseteq \bigcap_{i=1}^k N_i$ таких, что $F_\infty / N_i \in \mathfrak{K}$ и $N_i \supseteq \mathfrak{K}(F_\infty)$. Поэтому $F_\infty / \varphi^{-1}(N) \in \mathfrak{K}$ как фактор-группа поддекартова произведения групп F_∞ / N_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, $H \in \mathfrak{K}$ и формация $\mathfrak{K}$ замкнута относительно подгрупп.

Вопрос о существовании неконечно-базируемых формаций в настоящее время открыт. Можно, однако, надеяться, что таких нет среди формаций, порожденных одной (конечной) группой, т. е. что справедлив аналог теоремы Оутс и Пауэлла (см. [2]). Из общих утверждений о базах е-тождеств формаций отметим следующую, несколько парадоксальную теорему.

Теорема 3. *Если формация $\mathfrak{K}$ обладает базой е-тождеств, каждый элемент которой является групповым словом над X (т. е. содержится в свободной подгруппе $\langle X \rangle$, абстрактно порожденной X в F_∞), то $\mathfrak{K}$ замкнута относительно образования подгрупп.*

Доказательство. Согласно предложению 2 достаточно показать, что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - вполне характеристическая подгруппа F_∞ . Обозначим W базу е-тождеств формации $\mathfrak{K}$. Из теорем 1 и 2 следует, что $\mathfrak{K}(F_\infty)$ порождается $\{\sigma(W) \mid \sigma \in \text{Aut}(F_\infty)\}$. Зафиксируем элемент w базы е-тождеств формации. Без ограничения общности можно считать, что $w \in \langle X_0 \rangle$, где $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Поэтому для любого непрерывного эндоморфизма $\varphi: F_\infty \rightarrow F_\infty$ образ w определяется образами элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поскольку множества $X \setminus X_0$ и X равномощны, существует биекция $\alpha: X \setminus X_0 \rightarrow X$. Обозначим $\psi: F_\infty \rightarrow F_\infty$ непрерывный эпиморфизм, продолжающий α , и отображение $X_0 \rightarrow F_\infty: x_i \rightarrow \varphi(x_i)$, $i = \overline{1, n}$. Легко видеть, что ψ - действительно эпиморфизм и что $\psi(w) = \varphi(w)$. А так как $\mathfrak{K}(F_\infty)$ - характеристическая подгруппа F_∞ , получаем, что $\varphi(w) \in \mathfrak{K}(F_\infty)$. В силу произвольности выбора w видно, что $\varphi(\sigma(W)) \subseteq \mathfrak{K}(F_\infty)$, где $\sigma \in \text{Aut}(F_\infty)$, и поэтому $\varphi(\mathfrak{K}(F_\infty)) \subseteq \mathfrak{K}(F_\infty)$, что и требовалось показать.

1. Мельников О.В. // Мат. заметки. 1982. Т. 31. № 3. С. 339.

2. Нейман Х. Многообразия групп. М., 1969.

Поступила в редакцию 14.02.06.

Игорь Александрович Погорецкий - аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор О.В. Мельников.