

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, С. С. ЩЕРБАКОВ

РАСЧЕТ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ПРИ КОНТАКТНОМ НАГРУЖЕНИИ*

Formation of dangerous volumes under the contact of two solids is studied in the present paper. The method of damage estimation for the solid in the conditions of three-dimensional state of stress is considered.

Анализ взаимодействия элементов силовой системы в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1]. Процедура расчета опасных объемов предполагает знание трехмерного напряженного состояния элементов силовой системы, вызванного как локальным, так и объемным нагружением.

* Авторы статьи - сотрудники кафедры теоретической и прикладной механики.

В соответствии с [2] опасным называется объем V_p , в котором с Некоторой вероятностью P возможно появление циклических напряжений σ , превышающих нижнюю границу $\sigma_{-1\text{lim}}$ рассеяния пределов выносливости σ_{-1} .

Для однородного изотопного деформируемого твердого тела пределы выносливости $\sigma_{-1\text{lim}}^n$ и $\sigma_{-1\text{lim}}^\tau$ для нормальных и касательных напряжений определим как максимальные значения соответствующих напряжений $\sigma_{ij}^{(-1\text{lim})}$ ($i, j=x, y, z$) при действии предельной контактной силы $F_N^{-1\text{lim}}$:

$$\sigma_{-1\text{lim}}^n = \left| \max_{\xi, \eta, z, i} [\sigma_{ii}^{(-1\text{lim})}(\xi, \eta, z)] \right|, i=x, y, z,$$

$$\sigma_{-1\text{lim}}^\tau = \left| \max_{\xi, \eta, z, i, j} [\sigma_{ij}^{(-1\text{lim})}(\xi, \eta, z)] \right|, i, j=x, y, z, i \neq j.$$

Следовательно, если рассмотреть тензор напряжений σ_{ij} в каждой точке $M(\xi, \eta, z)$ тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных можно ввести тензор повреждающих напряжений:

$$g_{ij}(\xi, \eta, z, t) = \left| \frac{\sigma_{ij}(\xi, \eta, z, t)}{\sigma_{-1\text{lim}}^k} \right|, k=n, \tau, \quad (1)$$

где g_{ij} имеет вероятностную природу, поскольку в условии прочности как действующие напряжения σ_{ij} , так и пределы выносливости σ_{-1}^k являются случайными величинами с соответствующими плотностями распределения $\varphi(\sigma_{ij}(\xi, \eta, z))$ и $\varphi(\sigma_{-1}^k)$.

Рассмотрим вероятность локального повреждения в точке, вызванного действием σ_{ij} :

$$P(g_{ij}(\xi, \eta, z) \leq 1) = \int_{-\infty}^1 \varphi[g_{ij}(\xi, \eta, z)] dg_{ij}(\xi, \eta, z).$$

При $0 \leq g_{ij}(\xi, \eta, z, t) < 1$ вероятность появления повреждения существует в точке $M(\xi, \eta, z)$ $P(g_{ij}(\xi, \eta, z) \leq 1)$. При $1 \leq g_{ij}(\xi, \eta, z, t) < \infty$ степень повреждения тела в точке $M(\xi, \eta, z)$ равна $g_{ij}(\xi, \eta, z, t)$.

Без учета вероятностной составляющей напряжений тензор (1) будет следующим:

$$G_{ij}(\xi, \eta, z, t) = \begin{cases} g_{ij}(\xi, \eta, z, t) & \text{при } g_{ij}(\xi, \eta, z, t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } g_{ij}(\xi, \eta, z, t) < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Компоненты тензора (2) характеризуют только то условие, что действующие напряжения превышают предельные.

Для описания характера и уровня повреждений в области контакта введем представление о четырех типах опасных объемов: компонентном; тензорном; динамическом компонентном; динамическом тензорном. Определения, обозначения и формулы для расчета приведены в табл. 1.

Формальное представление компонентных и тензорных опасных объемов, записанных в табл. 1, таково:

$$V_{ij} = \{(\xi, \eta, z) / G_{ij}(\xi, \eta, z) > 1, (\xi, \eta, z) \in V_k\}, i, j=x, y, z,$$

$$V_T = \{(\xi, \eta, z) / \max_{i, j=x, y, z} [G_{ij}(\xi, \eta, z)] > 1, (\xi, \eta, z) \in V_k\}.$$

Классификация опасных объемов

Тип опасного объема	Обозначение	Расчетная формула	Определение
Компонентный	V_{ij}	$V_{ij} = \iiint_{G_{ij}(\xi, \eta, z) > 1} d\xi d\eta dz$	Область нагруженного тела, в каждой точке которой значение соответствующей компоненты тензора напряжений превышает предельное
Тензорный	V_T	$V_T = \iiint_{\max_{i,j,k,l} [G_{ijkl}(\xi, \eta, z)] > 1} d\xi d\eta dz$	Область нагруженного тела, в каждой точке которой значение хотя бы одной из компонент тензора напряжений превышает предельное
Динамический компонентный	V_{ij}^d	$V_{ij}^d = \bigcup_i V_{ij}(t_i)$	Область нагруженного тела, в каждой точке которой значение соответствующей компоненты тензора напряжений превышает предельное хотя бы единожды (в момент времени t_i) за цикл нагружения
Динамический тензорный	V_T^d	$V_T^d = \bigcup_i V_T(t_i)$	Область нагруженного тела, в каждой точке которой значение хотя бы одной из компонент тензора напряжений превышает предельное хотя бы единожды (в момент времени t_i) за цикл нагружения

Здесь V_k - рабочий объем поврежденного деформируемого твердого тела.

Компонентные и тензорные опасные объемы связаны следующим соотношением: $V_T = \bigcup_{i,j} V_{ij}$

Графическая иллюстрация компонентных опасных объемов V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , их пересечений $V_{xx} \cap V_{yy}$, $V_{yy} \cap V_{zz}$, $V_{xx} \cap V_{zz}$, $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$ и объединения $V_{xx} \cup V_{yy} \cup V_{zz}$ (тензорного опасного объема) представлена на рис. 1. Там же показан тензор $G_{ij}(dV)$ повреждающих напряжений в соответствии с (2). Видно, что при равновеликом значении компонент тензора $G_{ij}(dV)$ наиболее опасной зоной, где ожидается зарождение разрушения, является пересечение трех компонентных объемов $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$. В этой зоне тензор

$$G_{ij}(dV) = \begin{vmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz} \end{vmatrix}.$$

В зонах трех компонентных объемов (V_{xx} , V_{yy} , V_{zz}) разрушение скорее начнется там, где тензор $G_{ij}(dV)$ наибольший по величине.

Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную сложную форму, то их аналитическое определение согласно формулам табл. 1 может быть затруднено, в таких случаях их вычисляют методом Монте-Карло.

Относительные значения опасных объемов представляют собой (относительную) меру поврежденности деформируемого твердого тела [4, 5] (табл. 2).

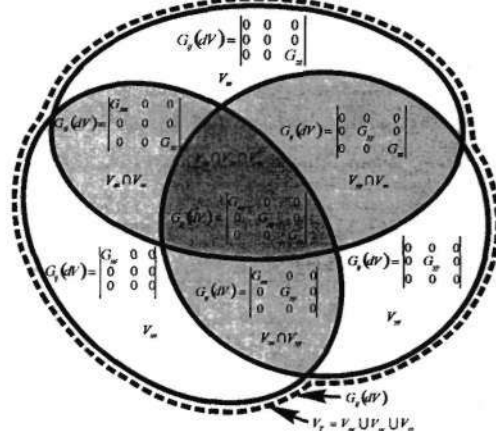


Рис. 1. Тензор повреждающих напряжений в тензорном опасном объеме (при напряженном состоянии, обусловленном лишь нормальными напряжениями)

Таблица 2

Классификация мер поврежденности	
Мера поврежденности	Определение
Компонентная	$\omega_y = V_y / V_k$
Тензорная	$\omega_r = V_r / V_k$
Динамическая компонентная	$\omega_y^d = V_y^d / V_k$
Динамическая тензорная	$\omega_r^d = V_r^d / V_k$

При расчете напряженного состояния воспользуемся теорией контактного взаимодействия Герца, которая позволяет определить параметры несогласованного контакта: p_0 , a , b - давление в центре контакта, большую и меньшую полуоси эллипса контактной площадки соответственно.

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ при действии на полупространство нормальных контактных усилий $p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ проводится численными методами с использованием решения задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [3, 6]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(n)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}{r^2} + \frac{z(\eta-y)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(\xi-x)^2}{\rho^5} \right\} d\xi d\eta, \\
 \sigma_{yy}^{(n)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2}{r^2} + \frac{z(\xi-x)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(\eta-y)^2}{\rho^5} \right\} d\xi d\eta, \\
 \sigma_{zz}^{(n)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} d\xi d\eta, \\
 \sigma_{xy}^{(n)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^2} - \frac{(\xi-x)(\eta-y)z}{\rho^3} \right] - \frac{3(\xi-x)(\eta-y)z}{\rho^5} \right\} d\xi d\eta, \\
 \sigma_{xz}^{(n)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(\xi-x)z^2}{\rho^5} d\xi d\eta, \\
 \sigma_{yz}^{(n)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(\eta-y)z^2}{\rho^5} d\xi d\eta,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $r^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2$, $\rho^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2$, $S(\xi, \eta) = \left\{ (\xi, \eta) / \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Расчет напряженного состояния $\sigma_y^{(\tau)}$, вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий $q(x, \eta) = f p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, где f - коэффициент трения, также выполняется численными методами с использованием решения задачи Черутти для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [3,6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(\tau)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(\xi - x)^3}{\rho^5} + (1 - 2\nu) \left[\frac{(\xi - x)}{\rho^3} - \frac{3(\xi - x)}{\rho(\rho + z)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\xi - x)^3}{\rho^3(\rho + z)^2} + \frac{2(\xi - x)^3}{\rho^2(\rho + z)^3} \right] \right\} d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy}^{(\tau)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(\xi - x)(\eta - y)^2}{\rho^5} + (1 - 2\nu) \left[\frac{(\xi - x)}{\rho^3} - \frac{(\xi - x)}{\rho(\rho + z)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\xi - x)(\eta - y)^2}{\rho^3(\rho + z)^2} + \frac{2(\xi - x)(\eta - y)^2}{\rho^2(\rho + z)^3} \right] \right\} d\xi d\eta, \\ \sigma_{zz}^{(\tau)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} (\xi - x) z^2}{2\pi \rho^5} d\xi d\eta, \\ \sigma_{xy}^{(\tau)} &= \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(\xi - x)^2(\eta - y)}{\rho^5} + (1 - 2\nu) \left[-\frac{(\eta - y)}{\rho(\rho + z)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\xi - x)^2(\eta - y)}{\rho^3(\rho + z)^2} + \frac{2(\xi - x)^2(\eta - y)}{\rho^2(\rho + z)^3} \right] \right\} d\xi d\eta, \\ \sigma_{xz}^{(\tau)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} (\xi - x)^2 z}{2\pi \rho^5} d\xi d\eta, \\ \sigma_{yz}^{(\tau)} &= - \iint_{S(\xi, \eta)} \frac{3q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} (\xi - x)(\eta - y) z}{2\pi \rho^5} d\xi d\eta.\end{aligned}\tag{4}$$

Таким образом, напряженное состояние при контакте с трением на основе (3) и (4) описывается суперпозицией напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}.\tag{5}$$

На рис. 2 представлена визуализация тензорного и компонентных опасных объемов, определяемых из соотношений,

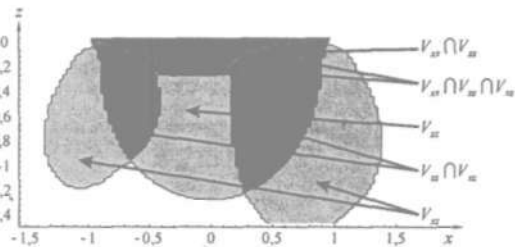


Рис. 2. Визуализация сечения $y=0$ тензорного опасного объема при контактной нагрузке $F_N=1500$ Н, $\sigma_{-lim}^* = 0,3 p_0$ и $\sigma_{-lim}^{\tau} = 0,08 p_0$

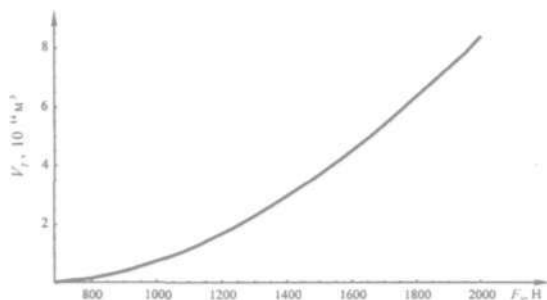


Рис. 3. Зависимость тензорного опасного объема V_T от контактной нагрузки

ного методом Монте-Карло, от контактной нагрузки.

Таким образом, предложена и реализована методика расчета опасных объемов для контактного нагружения на примере случая эллиптической площадки контакта с эллиптически распределенным по ней контактным давлением. Опасные объемы используются для построения соответствующих мер поврежденности и интегральных критериев подобия при моделировании процессов контактной усталости.

1. Сосновский Л.А. Основы трибофатики: в 2 т. Гомель, 2003. Т. 1,2.
2. Он же. Статистическая механика усталостного разрушения. Мн., 1987.
3. Журавков М.А., Щербаков С.С.//Труды 5-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), Иркутск, 3-7 окт. 2005 г. (Россия): в 2 т. / Отв. ред. А.П. Хоменко. Иркутск, 2005. Т. 1.С. 375.
4. О трибофатике: Материалы науч. семинара, Минск, 28 июля 2005 г. Мн., 2005.
5. Сосновский Л.А., Комиссаров В. В. //Завод. лаб. 2005. Т. 71. № 1.С. 47.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., 1989.

Поступила в редакцию 17.03.06.

Михаил Анатольевич Журавков - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой.

Сергей Сергеевич Щербаков - аспирант. Научный руководитель - М.А. Журавков.

приведенных в табл. 1, для напряженного состояния при контакте, рассчитываемого в соответствии с (5) при следующих параметрах: модуль упругости $E_1=E_2=2,01 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_1=\nu_2=0,3$, $R_{11}=0,003$ м, коэффициент трения $f=0,05$, $R_{12}=0,05$ м, $R_{21}=0,005$ м, $R_{22}=\infty$. На рис. 3 показана зависимость тензорного опасного объема $V_T = \bigcup V_{ij}, i, j = x, y, z$, вычислен-