УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТИПОВ ПОЛНОСТЬЮ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

The characterization and combinatorial properties of all types of completely non-integer vertices (all positive components of vertices are fractional) of the three-index axial assignment problem polytope is researched.

Хотя многогранник *M(2,n)* двухиндексной задачи о назначениях порядка *n* на первый взгляд аналогичен многограннику $M(3,n) = \{x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} \geq 0$

$$\forall (i,j,t) \in N_n^3,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall t \in N_n,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall j \in N_n,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall i \in N_n\},$$

$N_n = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$, $n \geq 2$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, между ними есть принципиальное отличие. Оно состоит в том, что многогранник *M(*3*,n)* не является целочисленным, в то время как многогранник *M*(2,*n*) имеет только целочисленные вершины [1]. Целочисленные вершины многогранника M(3,*n*) просто устроены и их общее количество равно $(n!)_2$ [1]. Сложное строение нецелочисленных вершин *M(*3*,n),* естественно, создает принципиальные трудности в его исследовании. Для многогранника

$M(3,n)$ одна из основных проблем связана с описанием типов максимально нецелочисленных вершин (МНВ), т. е. вершин, число дробных компонент которых равно $3n-2$. К настоящему времени установлено существование многих, но далеко не всех возможных, типов таких вершин [2-5].

В данной статье для любого числа $r \in \{2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ 3n-2\}$ охарактеризованы все типы r-полностью нецелочисленных (r-ПН) вершин многогранника $M(3,n)$, т. е. вершин, все положительные компоненты которых являются дробными и их число равно r.

Предварительные результаты. Зафиксируем число $m \in N_{n-1}$, и пусть I_1, J_1, T_1 - некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности m множества N_n. Положим $I_2 = N_n \setminus I_1$, $J_2 = N_n \setminus J_1$, $T_2 = N_n \setminus T_1$. Так как $m \le n-1$, то $I_2 \ne \varnothing$, $J_2 \ne \varnothing$, $T_2 \ne \varnothing$. Для двух троек (I_1, J_1, T_1) и (I_2, J_2, T_2) определим многогранники

$$M(I_s, J_s, T_s) = \Big\{ x = \|x_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|} :\ x_{ijt} \ge 0\ \ \forall (i,\ j,\ t) \in I_s \times J_s \times T_s,\ \sum_{i\in I_s}\sum_{j\in J_s} x_{ijt} = 1\ \forall t \in T_s,$$

$$\sum_{i\in I_s}\sum_{t\in T_s} x_{ijt} = 1\ \forall j \in J_s,\ \sum_{j\in J_s}\sum_{t\in T_s} x_{ijt} = 1\ \ \forall i \in I_s \Big\},\ \ s = 1,\ 2.$$

Замечание. Многогранники $M(I_1,\ J_1, T_1)$ и $M(I_2,\ J_2, T_2)$ отличаются от многогранников $M(3,m)$ и $M(3, n-m)$ соответственно лишь нумерацией элементов их матриц. При $m = 1$ многогранник $M(I_1,\ J_1,\ T_1)$, а при $m = n-1$ многогранник $M(I_2, J_2, T_2)$ вырождаются в точку.

Для вершины $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1,2$, введем множество $K(I_s, J_s, T_s, y^s) = \{(i,j,t) \in I_s \times J_s \times T_s :\ y^s_{ijt} > 0\}$.

С помощью утверждения 1 из [5] доказаны три следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $n \ge 4$, $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$ и $y^1 = \|y^1_{ijt}\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|}$ - некоторая r-ПН вершина многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$. Тогда для любой тройки индексов $(i_1,\ j_1,\ t_1) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1,\ y^1)$ $x^1 = \|x^1_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^1_{ijt} = y^1_{ijt}\ \ \forall (i,\ j, t) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1,\ y^1) \setminus \{(i_1,\ j_1,\ t_1)\},$$

$$x^1_{ijt} = y^1_{i_1, j_1, t_1}\ \ \forall (i,\ j,\ t) \in \{(i_1,\ n,\ t_1),\ (n,\ j_1,\ n)\},\ \ x^1_{nnn} = 1 - y^1_{i_1, j_1, t_1},$$

является $(r+2)$-ПН вершиной многогранника $M(3,n)$.

Лемма 2. Пусть $n \ge 4$, $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$ и $y^1 = \|y^1_{ijt}\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|}$ - некоторая r-ПН вершина многогранника $M(I_1,\ J_1,\ T_1)$. Тогда для любой пары троек индексов $(i_1, j_1, t_1), (i_1', j_1', t_1') \in K(I_1, J_1, T_1, y^1)$, удовлетворяющих условию $y^1_{i_1, j_1, t_1} + y^1_{i_1', j_1', t_1'} \ne 1$, матрица $x^2 = \|x^2_{ijt}\|_n$ с элементами

$$x^2_{ijt} = y^1_{ijt}\ \ \forall (i,\ j,\ t) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1,\ y^1) \setminus \{(i_1,\ j_1,\ t_1),\ (i_1',\ j_1',\ t_1')\},$$

$$x^2_{ijt} = y^1_{i_1, j_1, t_1}\ \ \forall (i,\ j,\ t) \in \{(i_1,\ n,\ t_1),\ (n,\ j_1,\ n)\},$$

$$x^2_{ijt} = \theta\ \ \forall (i,\ j,\ t) \in \{(n,\ j_1',\ t_1'),\ (i_1',\ n,\ n)\},$$

$x^2_{i'_1,j'_1,t'_1} = y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} - \theta,\ x^2_{nnn} = 1 - y^1_{i_1,j_1,t_1} - \theta,\ x^2_{ijt} = 0$ для остальных $(i,j,t) \in N^3_n$, является $(r + 3)$-ПН вершиной многогранника $M(3,n)$, где $\theta = \min\left\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1},\ 1 - y^1_{i_1,j_1,t_1}\right\}$.

Лемма 3. Пусть $n \geq 6$, $|I_s| = |J_s| = |T_s| \geq 2$ и $y^s = \left\|y^s_{ijt}\right\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ - некоторая r_s-ПН вершина многогранника $M(I_s,\ J_s,\ T_s)$, $s = 1, 2$. Тогда для любых троек индексов $(i_1, j_1, t_1),\ (i'_1, j'_1, t'_1) \in K(I_1, J_1, T_1, y^1)$, $(i_1,\ j_1,\ t_1) \neq (i'_1,\ j'_1,\ t'_1)$, $(i_2, j_2, t_2) \in K(I_2, J_2,\ T_2,\ y^2)$, удовлетворяющих условию $y^1_{i_1,j_1,t_1} + y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} < y^2_{i_2,j_2,t_2}$, матрица $x^3 = \left\|x^3_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^3_{ijt} = y^1_{ijt}\ \ \forall(i,\ j,\ t) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1, y^1) \setminus \{(i_1,\ j_1,\ t_1), (i'_1,\ j'_1,\ t'_1)\},$$

$x^3_{ijt} = y^2_{ijt}\ \ \forall(i,\ j,\ t) \in K(I_2,\ J_2,\ T_2,\ y^2) \setminus \{(i_2,\ j_2,\ t_2)\}$, $x^3_{i_2,j_2,t_2} = y^2_{i_2,j_2,t_2} - y^1_{i_1,j_1,t_1} - y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}$,

$x^3_{ijt} = y^1_{i_1,j_1,t_1}\ \ \forall(i,j,t) \in \{(i_1,\ j_2,\ t_1),\ (i_2,\ j_1,\ t_2)\}$, $x^3_{ijt} = y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}\ \ \forall(i,j,t) \in \{(i_2,\ j'_1,\ t'_1),\ (i'_1,\ j_2,\ t_2)\}$

является $(r_1 + r_2 + 2)$-ПН вершиной многогранника $M(3,n)$, где $r_s = \left|K(I_s, J_s, T_s, y^s)\right|$.

Основные результаты. Справедлива следующая

Теорема 1. Для любого числа $r \in \{2n,\ 2n+1,\ ...,\ 3n-2\}$, и только для такого, многогранник $M(3,n)$ имеет r-ПН вершины.

Доказательство. Так как каждое двумерное сечение матрицы x, представляющей собой r-ПН вершину многогранника $M(3,n)$, содержит не менее двух положительных компонент, то достаточно показать, что для любого $r \in \{2n,\ 2n+1,\ ...,\ 3n-2\}$ многогранник $M(3,n)$ имеет r-ПН вершины. Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу n. При n - 2 и $n = Ъ$ его справедливость вытекает из утверждений 2, 3 и 6, приведенных в [6]. Предположим, что утверждение верно для n - 1, где $n \geq 4$, и докажем его истинность для n. Положим $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$. Рассмотрим некоторую r-ПН вершину $y^1 = \left\|y^1_{ijt}\right\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|} \in M(I_1,\ J_1,\ T_1)$, где $r \in \{2n-2,\ 2n-1,\ 2n, ..., 3n-5\}$

Если $r \in \{2n-2,\ 2n-1\}$, то в силу леммы 1 для любой тройки индексов $(i_1,\ j_1,\ t_1) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1,\ y^1)$ матрица $x = \left\|x_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами $x_{ijt} = y^1_{ijt}\ \ \forall(i,\ j,\ t) \in K(I_1, J_1,\ T_1,\ y^1) \setminus \{(i_1,\ j_1,\ t_1)\}$, $x_{ijt} = y^1_{i_1,j_1,t_1}\ \forall(i,j,t) \in$ $\in \{(i_1, n, t_1), (n, j_1, n)\}$, $x_{nnn} = 1 - y^1_{i_1,j_1,t_1}$, является $(r+2)$-ПН вершиной многогранника $M(3,n)$. В случае, когда $r \geq 2n-1$, существует пара троек индексов $(i_1,\ j_1,\ t_1),\ (i'_1,\ j'_1,\ t'_1) \in K(I_1,\ J_1,\ T_1,\ y^1)$, удовлетворяющая неравенству $y^1_{i_1,j_1,t_1} + y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} < 1$. Поэтому согласно лемме 2 существует $(r+3)$-ПН вершина многогранника $M(3,n)$. Теорема 1 доказана.

Идентификация типов вершин многогранника проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины. Под двумерным сечением ориентации (i,j) трехиндексной матрицы $x = \left\|x_{ijt}\right\|_n$ с фиксированным значением индекса t будем понимать двухиндексную матрицу $x = \left\| x^t_{ijt} \right\|_n$, элементы которой определяются как $x^t_{ij} = x_{ijt}\ \forall (i,\ j) \in N^2_n$. Таким образом, матрица x имеет двумерные сечения ориентации *(i,j), (i,t), (j,t).*

Число дробных компонент матрицы $x \in M(3,n)$, содержащихся в двумерном сечении ориентации *(i,j)* с фиксированным индексом *t,* обозначим через $z\left(x^t_{ij}\right)$

Из теоремы 3 [7] вытекает утверждение: для того чтобы точка x многогранника *M(3,n)* была его $(3n\!-\!2\!-\!s)$-ПН вершиной, где $s \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-2\}$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{t=1}^{n} z\left(x^t_{ij}\right) = 3n-2-s;\ z\left(x^t_{ij}\right) \ge 2 \quad \forall t \in N_n, \tag{1}$$

причем среди неравенств имеется хотя бы s + 2 равенства.

Пусть $y^t_{ij} = z\left(x^t_{ij}\right) - 1\ \forall t \in N_n$. Тогда для любого $s \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-2\}$ система (1) примет вид

$$\sum_{t=1}^{n} y^t_{ij} = 2n-2-s \tag{2}$$

и количество решений уравнения (2) в натуральных числах совпадает с числом целочисленных решений системы (1). Как показано в [8], количество решений уравнения (2) в натуральных числах для любого $s \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-2\}$ равно $\begin{pmatrix} 2n-3-s \\ n-1 \end{pmatrix}$.

Следующая теорема характеризует все типы r-ПН вершин многогранника *M(*3*,n).*

Теорема 2. Для всякого $s \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-2\}$ и каждого целочисленного решения системы (1) существует точка x многогранника $\mathrm{M}(3,n)$, являющаяся его $(3n\!-\!2\!-\!s)$-ПН вершиной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем теорему для случая, когда $s = 0$. Доказательство ее проведем индукцией по числу и. При n=2 и n=3 утверждение теоремы 2 справедливо, так как известно [6], что многогранник М(3,и) имеет 4-ПН и 7-ПН вершины. При $n = 4,\ 5$ ее справедливость вытекает непосредственно из теоремы 2 работы [3]. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$, где $n > 6$, и докажем его истинность для *n.* На основании теоремы 2 из [3] достаточно ограничиться рассмотрением целочисленных решений $z\left(x^1_{ij}\right),\ z\left(x^2_{ij}\right),\ ...,\ z\left(x^n_{ij}\right)$ системы (1), удовлетворяющих условиям

$$z\left(x^t_{ij}\right) \le n-2 \quad \forall t \in N_n. \tag{3}$$

Существуют две возможности. 1) Пусть среди чисел $z\left(x^1_{ij}\right),\ z\left(x^2_{ij}\right),\ ...,\ z\left(x^n_{ij}\right)$ имеется хотя бы одно число, равное 3. Для определенности примем, что $z\left(x^n_{ij}\right) = 3$. Если положить $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$, то по предположению индукции существует матрица $y^1 \in M\left(I_1, J_1, T_1\right)$, являющаяся МНВ, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $\left(z\left(x^1_{ij}\right),\ z\left(x^2_{ij}\right),\ ...,\ z\left(x^{n-1}_{ij}\right)\right)$. Поскольку $\sum_{t=1}^{n-1} z\left(x^t_{ij}\right) = 3n-5,$, то существует элемент $t_1 \in N_{n-1}$ с условием $z\left(x_{ij}^{t_1}\right) \geq 3$. Следовательно, найдется пара троек индексов $\left(i_1, j_1, t_1\right), \left(i_1', j_1', t_1'\right) \in K\left(I_1, J_1, T_1, y^1\right)$, удовлетворяющая неравенству $y_{i_1, j_1, t_1}^1 + y_{i_1', j_1', t_1'}^1 < 1$. Поэтому, применяя лемму 2, при $r = 3n - 5$ построим МНВ многогранника $\mathrm{M}(3, n)$, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации (/,_/) задается вектором $\left(z\left(x_{ij}^1\right),\ z\left(x_{ij}^2\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^{n-1}\right),\ 3\right)$.

2) Пусть среди чисел $z\left(x_{ij}^1\right),\ z\left(x_{ij}^2\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^n\right)$ нет ни одного числа, равного 3. Будем считать, что $z\left(x_{ij}^1\right) \geq z\left(x_{ij}^2\right) \geq \ldots \geq z\left(x_{ij}^{t_0}\right) > 3 > z\left(x_{ij}^{t_0+1}\right) = z\left(x_{ij}^{t_0+2}\right) = \ldots = z\left(x_{ij}^n\right) = 2.$ Из (3) вытекает, что $t_0 > 1$. Пусть $z\left(x_{ij}^1\right) = p.$ Тогда ввиду (3) имеем $4 \leq p \leq n - 2.$ Положим $I_2 = J_2 = T_2 = \{1, n-p+2, n-p+3, \ldots, n\}$, $I_1 = N_n \setminus I_2$, $J_1 = N_n \setminus J_2$, $T_1 = N_n \setminus T_2$. Очевидно, что $|I_2| = p$, $|I_1| = n - p$. Согласно теореме 1 из [4] найдется $(3p-2)$-ПН вершина $\overline{\overline{y}} = \left\|\overline{\overline{y}}_{ijt}\right\|_{|I_2| \times |J_2| \times |T_2|} \in M(I_2, J_2, T_2)$, содержащая по крайней мере $2p-3$ компонент, каждая из которых равна $\dfrac{1}{2p-2}$. Легко видеть, что $z\left(\overline{\overline{y}}_{ij}^1\right) = z\left(x_{ij}^1\right)$, $z\left(\overline{\overline{y}}_{ij}^{n-l+2}\right) = 2$, $l = 2, \ldots, p$. В силу предположения индукции у многогранника $M\left(I_1, J_1, T_1\right)$ существует матрица $\overline{y} = \left\|\overline{y}_{ijt}\right\|_{|I_1| \times |J_1| \times |T_1|}$, являющаяся его $(3(n-p)-2)$-ПН вершиной, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации *(i,j)* удовлетворяет условиям $z\left(\overline{y}_{ij}^l\right) = z\left(x_{ij}^l\right)\ \ \forall l \in T_1 \setminus \{t_0\}$, $z\left(\overline{y}_{ij}^{t_0}\right) = z\left(x_{ij}^{t_0}\right) - 2$.

Положим $\overline{y}_{i_0, j_0, t_0} = \max\left\{\overline{y}_{i, j, t_0} : (i, j) \in I_1 \times J_1\right\}$. Очевидно, что

$$\overline{y}_{i_0, j_0, t_0} \geq \frac{1}{z\left(x_{ij}^{t_0}\right) - 2}. \tag{4}$$

Так как $z\left(x_{ij}^1\right) \geq z\left(x_{ij}^{t_0}\right)$, а $z\left(x_{ij}^1\right) = p$, то $z\left(x_{ij}^{t_0}\right) \leq p$. Значит, $z\left(x_{ij}^{t_0}\right) < p + 1$, т. е. $\dfrac{1}{p-1} < \dfrac{1}{z(x_{ij}^{t_0}) - 2}$. Поэтому из (4) вытекает неравенство $\dfrac{1}{p-1} < \overline{y}_{i_0, j_0, t_0}$.

Пусть $\left(i_1, j_1, 1\right), \left(i_2, j_2, 1\right) \in K\left(I_2, J_2, T_2, \overline{\overline{y}}\right)$ такие, что $\left(i_1, j_1\right) \neq \left(i_2, j_2\right)$, $\overline{\overline{y}}_{i_1, j_1, 1} = \overline{\overline{y}}_{i_2, j_2, 1} = \dfrac{1}{2p-2}$. Тогда ввиду $\dfrac{1}{p-1} < \overline{y}_{i_0, j_0, t_0}$ имеем $\overline{\overline{y}}_{i_1, j_1, 1} + \overline{\overline{y}}_{i_2, j_2, 1} < \overline{y}_{i_0, j_0, t_0}$. Поэтому, применяя лемму 3, построим МНВ многогранника $\mathrm{M}(3, n)$, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации *(i,j)* задается вектором $\left(z\left(x_{ij}^1\right),\ z\left(x_{ij}^2\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^n\right)\right)$. Тем самым теорема 2 доказана для *s=0.* При $n = 3$ и $s = 1$ теорема 2 тоже верна, поскольку известно [6], что многогранник $\mathrm{M}(3,3)$ имеет 6-ПН вершины.

Пусть теперь $s \in N_{n-2}$, где $n \geq 4$. Доказательство теоремы 2 в этом случае проведем индукцией по числу *s*. При 5 = 1,2 и я = 4 справедливость теоремы вытекает из утверждений 4 и 5, приведенных в [6]. Допустим, что теорема верна для *s* - 1, и докажем ее истинность для *s*. Пусть $n \geq 5$. Возьмем произвольное целочисленное решение $z\left(x_{ij}^{1}\right),\ z\left(x_{ij}^{2}\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^{n}\right)$ системы (1). Будем считать, что $z\left(x_{ij}^{n}\right)=2$. Если положить $I_1=J_1=T_1=N_{n-1}$, то по предположению индукции существует $(3n-4-s)$-ПН вершина $y^1\in M\left(I_1,J_1,T_1\right)$, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $\left(z\left(x_{ij}^{1}\right),\ z\left(x_{ij}^{2}\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^{n-1}\right)\right)$. Поэтому в силу леммы 1 найдется $(3n-2-s)$-ПН вершина многогранника $M(3,n)$, число компонент которой в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $\left(z\left(x_{ij}^{1}\right),\ z\left(x_{ij}^{2}\right),\ \ldots,\ z\left(x_{ij}^{n-1}\right),2\right)$. Теорема 2 доказана.

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
2. Кравцов В.М. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2003. № 3. С. 80.
3. Он же // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 62.
4. Он же // Изв. вузов. Математика. 2004. № 12. С. 37.
5. Он же // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 83.
6. Кравцов М. К., Кравцов В. М., Лукшин Е. В. // Весці НАН Беларусь Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59.
7. Они же //Дискрет, мат. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
8. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.

Поступила в редакцию 15.02.06.

Виктор Михайлович Кравцов - аспирант кафедры дискретной математики и алгоритмики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук В.М. Котов.