CONTROLLABILITA' COMPLETA AD UN SOTTOSPAZIO

VALERI KRAKHOTKO*

Questo lavoro è dedicato alla teoria di controllabilità completa ad un sottospazio, per sistemi lineari ordinari e sistemi lineari con ritardo sul controllo. Si danno alcuni risultati che si possono usare per risolvere i problemi pratici.

1. Consideriamo il processo di controllo

$$x(t)=Ax(t) + Bu(t) \;, \quad x(o)=x_o \;, \quad t\geq o \;, \tag{1}$$

dove: $x\varepsilon R^n$, $u\varepsilon R^r$, A, B sono matrici $n\times n$, $n\times r$.

<u>Definizione I.</u>

Il sistema (1) si dice completamente H-controllabile, quando per ogni $x_o, x_o\varepsilon R^n$, esistono t_1, $o<t_1<+\infty$, e un controllo $u(t)$, $t\varepsilon[o,t_1)$, $u(t)\equiv o$, $t\geq t_1$, tali che $x(o)=x_o$, $Hx(t)\equiv o$, $t\geq t_1$, ove H è una matrice $n\times n$.

Se $x_o=Lz$, $z\varepsilon R^n$, L è una matrice $n\times n$, allora il sistema (1) si dice completamente HL-controllabile.

Sia $\mu(t)=Hx(t)$, $t\geq o$. Dal sistema (1) abbiamo che

$$\mu^{(i)}(t)=HA^i x(t) + \sum_{J=1}^{i} HA^{J-1}Bu^{(i-J)}(t), \; i=1,2,..., \; t\geq t_1 \tag{2}$$

Se $\Psi(A)=o$ è il polinomio minimo per la matrice A

$$\Psi(A)= \sum_{i=o}^{k} a_i \; A^{k-i}=o, \; k\leq n, \; a_o=1, \tag{3}$$

allora usando (2) (3) si ha l'equazione

$$\mu^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} a_i\mu^{(k-i)}(t)= \sum_{i=o}^{\kappa-1} \sum_{j=1}^{\kappa-i} a_{k-i-j} \; HA^{j-1}Bu^{(i)}(t), \; t\geq t_1 \tag{4}$$

Dalle uguaglianze (2) e dalla definizione 1 segue che per $t=t_1$ $(u(t)\equiv o, t\geq t_1)$ sono veri le seguenti relazioni

$$Hx(t_1)=o,$$

$$HA^i x(t_1)=o, \quad i=1,2,\ldots, k-1 \tag{5}$$

Scriviamo la soluzione del sistema (1) nella forma

$$x(t)=e^{At}x_o + \int_o^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Allora da (4),(5) si segue che il problema della H-controllabilità completa si riduce a determinate $u(t)$, $t\geq o$, in modo tale che:

$$He^{At_1}x_o + \int_o^{t_1} He^{A(t_1-s)}Bu(s)ds=o \quad ,$$

$$HA^i e^{At_1}x_o + \int_o^{t_1} HA^i e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds=o, \quad i=1,2,\ldots,k-1 \quad .$$

Queste relazioni si possono scrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{k-1} \end{bmatrix} e^{At_1}x_o + \int_o^{t_1} \begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{k-1} \end{bmatrix} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds=o \quad .$$

Vale dunque il seguente [1].

Teorema 1.

Il sistema (1) è completamente H-controllabile se e solo se

$$\text{rank } (\bar{H}A^i B,\ i=o,1,\dots,k-1) = \text{rank } \bar{H}, \tag{6}$$

dove

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} HA^i \\ i=o,1,\dots,k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{k-1} \end{bmatrix} \quad .$$

Teorema 2.

Condizione necessaria e sufficiente per la HL-controllabilità completa del processo (1) è che

$$\operatorname{rank}\,(\bar{H}A^{i}B,\ i=o,1,\dots k-1) = \operatorname{rank}\,(\bar{H}L \vdots \bar{H}A^{i}B,\ i=o,1,\dots k-1) \qquad (7)$$

Consideriamo ora un sistema di controllo del tipo

$$\dot{x}(t)= Ax(t) + \sum_{i=o}^{m} B_i u^{(m-i)}(t),\ x(o)=x_o,\ t\geq o\ , \qquad (8)$$

dove $x\varepsilon R^n$, $u\varepsilon R^r$, A, B_i, $i=o,1,\dots m$, sono matrici costanti $n\times n$, $n\times r$.

Una soluzione del sistema (1) ha la forma

$$x(t)=e^{At}x_o + \sum_{j=o}^{m-1} \sum_{i=o}^{j} A^{j-i}B_i u^{(m-1-j)}(t) -$$

$$- e^{At}\sum_{j=o}^{m-1} \sum_{i=o}^{j} A^{j-i}B_i u^{(m-1-j)}(o) + \int_o^t e^{A(t-s)} \sum_{j=o}^{m} A^{m-j}B_j u(s)ds \quad .$$

Quindi usando i risultati (6) e (7) per il sistema (1) si ha i seguenti teoremi.

Teorema 3.

Il sistema (8) è completamente H-controllabile se e solo se

$$\operatorname{rank}\,(\bar{H}A^{i}\bar{B},\ i=o,1,\dots k-1) = \operatorname{rank}\,\bar{H} \quad . \qquad (9)$$

Teorema 4.

Il sistema (8) è completamente HL-controllabile se e solo se

$$\operatorname{rank}\,(\bar{H}A^{i}\bar{B}\ i=o,1,\dots k-1) = \operatorname{rank}\,(\bar{H}L,\ \bar{H}A^{i}\bar{B},\ i=o,1,\dots k-1).$$

Dove $\bar{B}=\sum_{j=o}^{m} A^{m-j}B_j$.

2. Supponiamo che a ogni $t\geq o$ si misuri la uscita del sistema (1)

$$y(t)= Hx(t),\ t\geq o,\ y_o=y(o). \qquad (11$$

<u>Definizione 2[2]</u>.

Il sistema (1) si dice completamente controllabile alla uscita (11), quando per ogni n-vettore $y_o= Hz$, $z\varepsilon R^n$, esistono t_1, $o<t_1<+\infty$, un controllo $u(t)$, $t\varepsilon[o,t_1)$, $u(t)\equiv o$, $t\geq t_1$, tali che $y(o)=y_o$, $y(t)\equiv o$, $t\geq t_1$.

E' chiaro che la uscita y(t) soddisfa all'equazione

$$y^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{k} a_i y^{(k-i)}(t) = \sum_{i=o}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} a_{k-i-j} HA^{j-1}Bu^{(i)}(t) . \qquad (12$$

L'equazione (12) si può scrivere così

$$\dot{Y}(t)= \bar{A}Y(t) + \sum_{i=o}^{k-1} \bar{B}_i u^{(k-1-i)}(t),\ t\geq o, \qquad (13$$

dove $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0_{nr} \\ \vdots \\ 0_{nr} \\ B_{k-1-i} \end{bmatrix}$, $B_{k-1-i}= \sum_{j=1}^{k-i} a_{k-i-j} HA^{j-1}B$, $i=o,1,\dots,k-1$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_n & E_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & 0_n & E_n & \dots & 0_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0_n & 0_n & 0_n & \dots & E_n \\ -a_kE_n & -a_{k-1}E_n & -a_{k-2}E_n & \dots & -a_1E_n \end{bmatrix},$$

$$Y(t)=\{\underbrace{y(t),y^{(1)}(t),\dots,y^{(k-1)}(t)}_{nk}\} ,$$

0_p è matrice $p\times p$, $0_{p,k}$ è matrice $p\times k$.

Si deduce facilmente, che il sistema (1) è completamente controllabile alla uscita (11) se e solo se il sistema (13) è completamente $\bar{\bar{H}}\ \bar{L}$-controllabile, con

$$\bar{\bar{H}}= [E_n 0_n \dots 0_n], \quad \bar{L}= \begin{bmatrix} H & 0_n & \dots & 0_n \\ HA & 0_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ HA^{(k-1)} & 0_n & \dots & 0_n \end{bmatrix} .$$

Ossia, la condizione necessaria e sufficiente per la $\bar{\bar{H}}\ \bar{L}$-controllabilità completa del sistema (13) è che

$$\text{rank}\ \{\underline{H}\ \bar{A}^i\bar{\bar{B}},\ \ i=o,1,\dots,nk-1\}=\text{rank}\ \{\underline{H}\ \bar{L},\ \underline{H}\ \bar{A}^i\bar{\bar{B}},\ i=o,1,\dots,nk-1\},$$

dove

$$\underline{H}= \begin{bmatrix} \bar{\bar{H}} \\ \bar{\bar{H}}\ \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{\bar{H}}\ \bar{A}^{nk-1} \end{bmatrix} , \qquad \bar{\bar{B}} = \sum_{i=o}^{k-1} \bar{A}^i\bar{B}_i .$$

Trasformando questa condizione si ha

Teorema 5.

Il sistema (1) è completamente controllabile alla uscita(11) se e solo se

$$\text{rank}\ \{\bar{H}A^iB,\ i=o,1,\dots,k-1\}= \text{rank}\ \bar{H} \qquad (14)$$

Ossia questo risultato è equivalente al risultato (6).

3. Definizione 3.

Il sistema (1) si dice completamente H-controllabile allo stato, quando per ogni x_o, $x_o\varepsilon R^n$ esistono t_1, $o<t_1<+\infty$, e un controllo $u(t)$, $t\geq o$, tali che la soluzione del sistema (1) relativa ad $u(t)$ realizzi le condizioni $x(o)= x_o$, $Hx(t)\equiv o$, $t\geq t_1$.

Ora scriviamo (12) alla forma

$$\dot{Z}(t) = A^{1}Z(t) + B^{1}v(t), \quad t \geq o' \quad , \tag{15}$$

dove $Z(t) = \{y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(k-1)}(t),\ u(t),\ u^{(1)}(t), \ldots, u^{(k-2)}(t)\}$
$u^{(k-1)}(t) = v(t)$,

$$A^{1} = \left[\begin{array}{ccccc:ccc}
0_n & E_n & 0_n & \ldots & 0_n & 0_{nr} & \ldots & 0_{nr} \\
0_n & 0_n & E_n & \ldots & 0_n & 0_{nr} & \ldots & 0_{nr} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0_n & 0_n & 0_n & \ldots & E_n & 0_{nr} & \ldots & 0_{nr} \\
-a_k E_n & -a_{k-1}E_n & -a_{k-2}E_n & \ldots & -a_2 E_n & B_{k-1} & \ldots & B_1 \\
\hdashline
 & & & & & 0_r & \ldots & 0_r \\
 & & & & & 0_r & \ldots & 0_r \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & 0_r & \ldots & E_r \\
 \multicolumn{5}{c:}{0_{r(k-1),nk}} & 0_r & \ldots & 0_r
\end{array}\right], \quad B^{1} = \left[\begin{array}{c}
0_{nr} \\ 0_{nr} \\ \cdot \\ 0_{nr} \\ B_o \\ 0_r \\ 0_r \\ \cdot \\ 0_r \\ E_r
\end{array}\right]$$

$$B_{k-1-i} = \sum_{j=1}^{k-i} a_{k-i-j}\, HA^{j-1}B, \quad i=o,1,\ldots,k-1 .$$

E' chiaro che il sistema (1) è completamente H-controllabile allo stato se e solo se il sistema (15) è completamente $H^{1}L^{1}$-controllabile dove

$$H^{1} = [E_n, 0_n \ldots 0_n\ 0_r \ldots 0_r],$$

$$L^1 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} H & 0_n & \dots & 0_n & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} \\ HA & 0_n & \dots & 0_n & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ HA^{k-1} & 0_n & \dots & 0_n & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} \\ \hline & & & & 0_r & \dots & 0_r \\ & & 0_{r(k-1),nk} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0_r & \dots & 0_r \end{array}\right].$$

E' ovvio che $H^1Z(t) \equiv o \quad t \geq t_1 \quad (Z(o) = L^1Z,\ Z \varepsilon R^{nk+r(k-1)}$,

$v(t) \equiv o,\ t \geq t_1) \Rightarrow Hx(t) \equiv o,\ t \geq t_1 \quad (x(o)=x_o, x_o \varepsilon R^n)$

Quindi usando il risultato (7) si ha che il sistema (15) è completamente H^1L^1-controllabile se e solo se

$\mathrm{rank}\ \{\bar{H}^1(A^1)^iB^1,\ i=o,1,\dots nk+r(k-1)-1\} = \mathrm{rank}\{\bar{H}^1L^1, \bar{H}^1(A^1)^iB^1,$

$i=o,1,\dots,nk+r(k-1)-1\}$.

Trasformando questa relazione si ha il seguente.

Teorema 6.

La condizione necessaria e sufficiente per la H-controllabilità completa allo stato del sistema (1) è che

$$\mathrm{rank}(\bar{H}A^iB,\ i=o,1,\dots,k-1) = \mathrm{rank}(\bar{H}, H_B, \bar{H}A^iB,\ i=o,1,\dots,k-1),$$

dove

$$H_B = \begin{bmatrix} 0_{nr} & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} & 0_{nr} \\ 0_{nr} & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} & HB \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0_{nr} & HB & \dots & HA^{k-4}B & HA^{k-3}B \\ HB & HAB & \dots & HA^{k-3}B & HA^{k-2}B \end{bmatrix}.$$

4. Adesso consideriamo il processo di controllo con ritardo sul controllo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2u(t-h) + \int_0^h B_3(s)u(t-s)ds, \tag{16}$$

$$x(o) = x_o, \ x_o \varepsilon R^h, \ u_o(.)=(u(s)=f(s), \ s\varepsilon[-h,o]), \ t \geq o,$$

con $x(t)\varepsilon R^n$, $u(t)\varepsilon R^r$, A, B_1, B_2 sono matrici costanti, $B_3(s)$ è una funzione a valori matrici.

<u>Definizione 4.</u>

Il sistema (15) si dice completamente H-controllabile, quando per ogni n-vettore x_o e per ogni funzione $f(t)$, $t\varepsilon[-h,o]$, esistono t_1, $t_1<+\infty$, e un controllo $u(t)$, $t\varepsilon[o,t_1-h]$, $u(t)\equiv o$, $t\geq t_1-h$, tali che la traiettoria del sistema (15) relativa ad $u(t)$ realizzi le condizioni $x(o)=x_o$, $u(t)=f(t)$, $t\varepsilon[-h,o]$, $Hx(t)\equiv o$, $t\geq t_1$.

Sia

$$x(t)=p(t)+\int_o^h M(s)u(t-s)ds, \ t\geq o . \tag{17}$$

Allora usando (15) si ha

$$\dot{x}(t)=\dot{p}(t)+M(o)u(t)-M(h)u(t-h)+\int_o^h \frac{dM(s)}{ds} u(t-s)ds=Ap(t)+\int_o^h AM(s)\times$$

$$\times u(t-s)ds+B_1u(t)+B_2u(t-h)+\int_o^h B_3(s)u(t-s)ds .$$

Quindi la funzione $M(s)$, $s\varepsilon[o,h]$ soddisfa l'equazione

$$\frac{dM(s)}{ds} = AM(s) + B_3(s), \ s\varepsilon[o,h],$$

con la condizione iniziale

$$M(h)=-B_2 .$$

Cioè

$$M(s)=-e^{A(s-h)}B_2 + \int_h^s e^{A(s-\tau)}B_3(\tau)d\tau.$$

Ora possiamo dedurre che la funzione $p(t)$, $t \geq o$ soddisfa l'equazione

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + (B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_o^h e^{-As}B_3(s)ds)u(t), \tag{18}$$

con la condizione iniziale

$$p(o) = x_o - \int_o^h (-e^{A(s-h)}B_2 + \int_h^s e^{A(s-\tau)}B_3(\tau)d\tau)\ f(-s)ds.$$

Si deduce facilmente da (17) che il sistema (16) è completamente H-controllabile se e solo se il-sistema (18) è completamente H-controllabile.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

<u>Teorema 7</u>.

Il processo di controllo (16) è completamente H-controllabile se e solo se

$$\operatorname{rank}(\bar{H}A^iB_h,\ i=o,1,\dots,k-1) = \operatorname{rank}\bar{H},$$

dove

$$B_h = B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_o^h e^{-As}B_3(s)ds.$$

Deriva direttamente dalla condizione (6).

Se $B_3(s) \equiv o$, $s \in [o,h]$, allora il sistema (16) completamente H-controllabile allo stato se e solo se

$$\operatorname{rank}(\bar{H}A^iB_h^*,\ i=o,1,\dots,k-1) = \operatorname{rank}(\bar{H}, H_{B_1}, H_{B_2}, \bar{H}A^iB_h^*,\ i=o,1,\dots,k-1).$$

Dove $B_h^* = B_1 + e^{-Ah}B_2$,

$$H_{B_i} = \begin{bmatrix} 0_{nr} & 0_{nr} & \dots & 0_{nr} \\ 0_{nr} & 0_{nr} & \dots & HB_i \\ . & . & \dots & . \\ 0_{nr} & HB_i & \dots & HA^{k-3}B_i \\ HB_i & HAB_i & \dots & HA^{k-2}B_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2\ .$$

BIBLIOGRAFIA

1. R.Gabasov, F.Kirillova "Teoria qualitativa dei processi ottimali" Ed. M.I.R. Mosca, 1971

2. V.Krakhotko, G.Razmislovic "Problema di controllabilità completa dei sistemi dinamici" (in russo) Differenzialnye uravneniya, v. 15, N 9, 1979.