$\left|x-x_0\right|^{\nu}$

$\nu=\alpha<1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\mathfrak{D}^{\alpha,+\varepsilon}\varphi\right)\left(x_0-\varepsilon\right)=-\Gamma\left(1+\nu\right)\neq 0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\mathfrak{D}^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)\left(x_0+\varepsilon\right)=\Gamma\left(1+\nu\right)\neq 0.$$

$\left|x_0-x\right|^{\nu}$

$\varphi\left(x\right)=\ln\left(x\right)$

$\left(\mathfrak{D}^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)\left(x\right)$

$\varepsilon=x-x_0$

$x=x_0+\varepsilon$

УДК 517.51 8.837

А.Я. РАДЫНО, А.М. СЕНДЕР

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЕ p-АДИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ ИЗ Z_p В Q_p*

The article is devoted to approximation of a continuous p-adic function of p-adic argument by splines of the form $L_n(x)=\sum_{k=1}^{p^{n+m}}\lambda_k\frac{1-\delta_{x_k}(x)}{|x-x_k|_p^{\alpha}}$, where their parameters are defined from interpolation relations with respect to the approximated function. A theorem of uniform approximation of the function by splines is proved.

В последнее время p-адические числа интенсивно пытаются использовать в моделях квантовой физики, биологии и теории конденсированных и аморфных сред [1-3]. Согласно принципу Воловича - Владимирова физические законы не должны зависеть от выбора числового поля. В то же время все физические измерения фиксируются рациональными числами. Однако поле рациональных чисел не полно, поэтому на нем не построишь анализ: там не будет ни производных, ни интегралов, а они важны, так как многие законы физики опи-

*' Авторы статьи - сотрудники кафедры теории функций.

сываются дифференциальными и интегральными уравнениями. Согласно теореме Островского имеется лишь два вида нетривиальных пополнений поля рациональных чисел: это архимедово пополнение - всем известное поле действительных чисел и неархимедово пополнение - поле p-адических чисел. В этой связи естественно развивать теорию функций p-адического аргумента и анализ в данном направлении. Одной из необходимых составляющих любого анализа является теория приближений. Имеется ряд статей (см. [4—7]), посвященных p-адической интерполяции и аппроксимации, однако большинство из них касаются некоторых обобщений интерполяционных теорем Малера [8].

Фиксируем простое число p. Напомним, что под p-адическими числами мы понимаем множество элементов x вида $x=\sum_{k=N}^{\infty} a_k p^k$, где $a_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $a_N \neq 0$, N - некоторое целое число с p-адической абсолютной величиной $|x|_p = p^{-N}$. Это множество образует поле и обозначается $\mathbf{Q}_\mathbf{p}$. Мы будем приближать непрерывную функцию $f:\mathbf{Z}_\mathbf{p} \to \mathbf{Q}_\mathbf{p}$, где $\mathbf{Z}_\mathbf{p}=\{x\in \mathbf{Q}_\mathbf{p} : |x|_p \le 1\}$, по норме $\|f\|=\max\limits_{x\in \mathbf{Z}_\mathbf{p}}|f(x)|_p$ линейными комбинациями сдвигов функции $\frac{1-\delta_0(x)}{|x|_p^\alpha}$, $\frac{1-\delta_0(x)}{|x|_p^\alpha}$, пользуясь методом интерполяции.

В работе [9] рассматривалась аналогичная задача приближения линейными комбинациями сдвигов функции $|x|_p$, но для вещественнозначной функции p-адического аргумента. Там же было показано, что такие функции не годятся для приближения Qp-значных функций по той причине, что $|x|_p$ разрывна в нуле как Qp-значная функция. В качестве аппроксиманта в [9] предлагалась $\varphi(x)=\frac{1-\delta_0(x)}{|x|_p}$. Но, скорее всего, и эта функция не приведет к положительному результату. Успех будет, когда $\varphi(x)=\frac{1-\delta_0(x)}{|x|_p^\alpha}$, при натуральном $\alpha \ge 2$ Выбор аппроксиманта такого вида оправдан еще и тем, что он похож на псевдодифференциальный оператор Владимирова (см. [1]) и его можно будет использовать при решении нелинейных задач иерархической диффузии.

Пусть $B[a,p^{-m}]=\{x\in \mathbf{Q}_\mathbf{p} : |x-a|_p \le p^{-m}\}$, $I_k=\left(\delta_{\left[\frac{i-1}{p^k}\right],\left[\frac{j-1}{p^k}\right]}\right)_{i,j=1}^{p^{n+m}}$, $k=0, 1, \ldots, n+m$ – блочно-диагональная матрица размерности $p^{n+m}\times p^{n+m}$, $n,\ m\in \mathbf{N_0}$, г $\delta_{x,y}$ - символ Кронекера, $[\cdot]$ - целая часть числа.

Постановка и решение интерполяционной задачи. Пусть $f\in C(\mathbf{Z}_\mathrm{p};\mathbf{Q}_\mathrm{p})$. Будем приближать функцию $f=I_{B[a,p^{-m}]}$, характеристическую функции шара $B[a,p^{-m}]$, так как локально-постоянные функции плотны в $C(\mathbf{Z}_\mathrm{p};\ \mathbf{Q}_\mathrm{p})$. Рассмотрим каноническое разбиение единичного шара $B[0,\ 1]=\coprod_{k=0}^{p^{n+m}-1} B[k,p^{-n-m}]$. Центры шаров занумеруем с помощью взаимно однозначного отображения $l:\{0,\ 1,\ \ldots,\ p^{n+m}-1\}\to\{0,\ 1,\ \ldots,\ p^{n+m}-1\}$, действующего по правилу

$l\left(\sum_{j=0}^{n+m-1} k_j p^j\right) = \sum_{j=0}^{n+m-1} k_j p^{n+m-1-j}$, где $\sum_{i=0}^{n+m-1} k_i p^i$ - p-адическое разложение числа $k \in \{0, 1, ..., p^{n+m}-1\}$. Тогда $x_k = l(k-1)$, $k = 1,2,...,p^{n+m}$. Такое упорядочивание чисел $0, 1, ..., p^{n+m}-1$ обеспечивает ситуацию, когда числа с близкими номерами близки по p-адической метрике. Если рассмотреть p-адическое разложение чисел $x_1, x_2, ..., x_{p^{n+m}}$, то этот порядок окажется лексикографическим. Таким образом, $\coprod_{k=0}^{p^{n+m}-1} B[k, p^{-m-n}] = \coprod_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k, p^{-m-n}]$

Задача интерполирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты λ_j для функции вида $L_n(x) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \frac{1-\delta_{x_k}(x)}{|x-x_k|_p^{\alpha}}$, где $\alpha \in \{2, 3, 4, ...\}$, $\delta_{x_k}(x) \equiv \delta_0(x-x_k)$, из равенств

$$L_n(x_i) = f(x_i), \ i = 1, 2, ..., p^{n+m}. \tag{1}$$

Условие (1) задает систему линейных уравнений относительно коэффициентов λ_i, $i = 1, 2, ..., p^{n+m}$, матрица которой равна $(A)_{ij} = \frac{1-\delta_{x_j}(x_i)}{|x_i - x_j|_p^{\alpha}}$, $i, j = 1, ..., p^{n+m}$.

Нетрудно убедиться (подробнее см. [9, 10]), что матрица A имеет следующий вид:

$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)}$. Преобразуем ее к виду $A = \sum_{k=0}^{n+m} a_k I_k$. Отсюда получаем коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{n+m}$:

$$a_0 = -p^{\alpha(n+m-1)}, \ a_k = p^{\alpha(n+m-k-1)}(p^{\alpha}-1), \ k = 1, ..., n+m-1, \ a_{n+m} = 1. \tag{2}$$

Тогда согласно лемме 2 [9] существует *A*-1, которая имеет вид $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n+m} b_k I_k$,где

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \ b_k = -\frac{a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}, \ k = 1, ..., n+m. \tag{3}$$

Теорема 1[10]. *Интерполяционная задача* (*1*) *имеет единственное решение, при этом*

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k, \ \text{если} \ x_j \in B[a, p^{-m}], \tag{4}$$

$$\lambda_j = p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k, \ \textit{если} \ x_j \in B[a, p^{-m+N}] \setminus B[a, p^{-m+N-1}], \ N = 1, ..., m. \tag{5}$$

Задача приближения. Здесь мы часто будем использовать широко известный факт из p-адического анализа, который есть во всех учебниках (см., например, [11]):

$$\forall u, \ v \in \mathbf{Q_p}, \ \text{таких, что} \ |u|_p > |v|_p \ \text{верно равенство} \ |u+v|_p = |u|_p. \tag{6}$$

Лемма 1. *Справедлива следующая формула:*

$$\max_{x \in \mathbf{Z_p}} |I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x)|_p = \max_{k=1,...,p^{n+m}} |\lambda_k|_p \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}}. \tag{7}$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbf{Z}_p = \coprod_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k,\ p^{-n-m}]$. Ясно, что x попадет в некий шар $B[x_\nu,\ p^{-n-m}]$, $\nu \in \{1,\ 2,\ ...,\ p^{n+m}\}$

Рассмотрим модуль разности

$$|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x)|_p = \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{p^{n+m}} \lambda_i \frac{1-\delta_{x_i}(x)}{|x - x_i|_p^\alpha} \right|_p . \tag{8}$$

Поскольку $|x - x_i|_p = |x_\nu - x_i|_p$, $\forall i \neq \nu$, $i = 1,\ ...,\ p^{n+m}$ (свойство (6)), то правая часть равенства (8) примет вид:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i \frac{1-\delta_{x_i}(x_\nu)}{|x_\nu - x_i|_p^\alpha} - \sum_{i=\nu+1}^{p^{n+m}} \lambda_i \frac{1-\delta_{x_i}(x_\nu)}{|x_\nu - x_i|_p^\alpha} - \lambda_\nu \frac{1-\delta_{x_\nu}(x)}{|x - x_\nu|_p^\alpha} \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x_\nu) - \lambda_\nu \frac{1-\delta_{x_\nu}(x)}{|x - x_\nu|_p^\alpha} \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) - \lambda_\nu \frac{1-\delta_{x_\nu}(x)}{|x - x_\nu|_p^\alpha} \right|_p . \tag{9}$$

Поскольку $x \in B[x_\nu, p^{-n-m}]$ и в $\mathbf{Q}_p$ шары либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом, то либо $B[x_\nu, p^{-n-m}] \cap B[a, p^{-m}] = \varnothing$, и тогда $I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) = 0$, либо $B[x_\nu, p^{-n-m}] \subset B[a, p^{-m}]$, и тогда $I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) = 1$. В обоих случаях имеем $I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu)$. Отсюда, учитывая (8) и (9), получим равенство

$$|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x)|_p = |\lambda_\nu|_p \frac{\left|1-\delta_{x_i}(x)\right|_p}{\left||x - x_\nu|_p\right|_p^\alpha} . \tag{10}$$

Берем от обеих частей максимум

$\max_{x \in \mathbf{Z}_p} |I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x)|_p = |\lambda_\nu|_p \dfrac{\left|1-\delta_{x_i}(x^*)\right|_p}{\left||x^* - x_\nu|_p\right|_p^\alpha}$, где $x^* \in B[x_\nu, p^{-m-n}]$ точка, в которой достигается максимум правой части равенства (10). Чтобы правая часть (10) была максимальной, нужно, чтобы $x^* \in B[x_\nu, p^{-m-n}] \setminus B[x_\nu, p^{-m-n-1}]$ и число $|\lambda_\nu|_p$ было максимальным. Удовлетворив эти требования, получим утверждение леммы 1.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C(\mathbf{Z}_p;\ \mathbf{Q}_p)$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\| = 0$

Доказательство. Как уже было сказано, утверждение теоремы достаточно доказать для случая, когда / - характеристическая функция шара, поэтому достаточно оценить правую часть выражения (7), а именно найти максимум $\max_{k=1,...,p^{n+m}} |\lambda_k|_p$. Для его вычисления воспользуемся формулами (3) - (5) и свойством (6).

Из формул (2) следует, что

$$|a_k|_p = p^{-\alpha(n+m-k-1)},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n+m-1,\ |a_{n+m}|_p = 1. \tag{11}$$

Тогда $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i = 0,1,\dots,n+m-1$, и по свойству (6)

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i p^i\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}, \ k = 0,\ 1,\ \dots,\ n+m-1. \qquad (12)$$

Подставим в формулу (4) значения b_k, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n+m$, в соответствии с равенствами (3) и преобразуем получившееся выражение:

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k p^k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i} =$$

$$= \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{k} a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i} \right) + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}.$$

В последнем равенстве первые слагаемые сокращаются, и выражение (4) принимает вид

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}. \qquad (13)$$

Вычислим p-адический модуль от слагаемых в (13), используя равенства (11), (12) и утверждение (6):

$$\left|\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}, \qquad (14)$$

$$|b_k|_p = \left|\frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}\right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \text{ где } k = n+1,\dots,n+m-1,$$

$$|b_{n+m}|_p = \left|\frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i}\right|_p = p^{2(n+m-1)}.$$

Рассмотрим два случая. 1) Если $\alpha > 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $к=n+2,\dots,n+m$. Если $\alpha = 2$, то $|b_{n+1}|_p = |b_{n+2}|_p = \dots = |b_{n+m-1}|_p = p^{2m+2n+1} > |b_{n+m}|_p$

Отсюда при $\alpha > 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{-n} |b_{n+1}|_p = p^{-n} \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = p^{\alpha(m-1)+n+1}. \qquad (15)$$

При $\alpha = 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p \le p^{-n} |b_{n+1}|_p = p^{-n} p^{2n+2m-1} = p^{2m+n-1}. \qquad (16)$$

Очевидно, что значение модуля из формул (15) и (16) больше модуля из формулы (14). Поэтому модуль правой части равенства (13) для $a > 2$ равен $p^{\alpha(m-1)+n+1}$, а для $\alpha = 2$ не превышает p^{2m+n-1}. По доказанному видно, что для $\alpha > 2$ $\left|p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k\right|_p \le \left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}$ для всех $N = l,\dots,m,$ а для $\alpha = 2$

$\left|p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k\right|_p \le \left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{2m+n-1}$ для всех $N = 1,...,m$. Отсюда справедливы соотношения:

$$\max_{k=1,\dots,p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \text{ при } \alpha > 2, \qquad (17)$$

$$\max_{k=1,\dots,p^{n+m}} |\lambda_k|_p \le p^{2m+n-1} \text{ при } \alpha = 2. \qquad (18)$$

Подставляя (17) в (7) для , имеем:

$$\max_{x\in \mathbf{Z}_p} | I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n(x) |_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Подставляя (18) в (7) для , имеем:

$$\max_{x\in \mathbf{Z}_p} | I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_n'(x) |_p \le p^{2m+n-1} \frac{1}{p^{2(n+m)}} = \frac{1}{p^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В обоих случаях это эквивалентно утверждению теоремы.

Замечание. Параметр **a** может быть не только целым, но и рациональным числом. В этом случае в качестве множества значений функции вместо $\mathbf{Q}_p$ будет выступать конечное алгебраическое расширение $K = \mathbf{Q}_p[p^{\frac{1}{\nu}}]$, где ν - знаменатель **a**.

1. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. p-Адический анализ и математическая физика. М., 1994.
2. Khrennikov A. Non-Archimedian Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht, 1997.
3. Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Kozyrev S. V. // J. Phys. A: Math. Gen 32. 1999. P. 8785.
4. Amice Y. // Bull. Soc. Math. France 92. 1964. P. 117.
5. Bhargava M., Kedlaya K.S. // Actra Arith. 91 (3). 1999. P. 191.
6. Van Hamme L. // Proceedings of the Conference on p-adic Analysis. Nijmegen, 1978. Rep. 7806. P. 119.
7. Srinivasan V.K., Tran Cam Van // J. Approx. Theory. 35 (2). 1982. P. 191.
8. Mahler K. Introduction to p-Adic Numbers and their Functions. Cambridge, 1973.
9. Khrennikov A., Radyna A. // J. of Approximation Theory. 2003. № 120. P. 124.
10. Радына А.Я. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 21.
11. Schikhof W. Ultrametric calculus. Cambridge, 1984.

Поступила в редакцию 17.03.06.

Александр Яковлевич Радыно - кандидат физико-математических наук, доцент.

Александр Николаевич Сендер - аспирант. Научный руководитель - А.Я. Радыно.