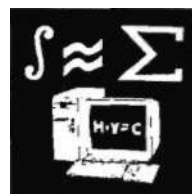


Математика и информатика



УДК 517.977

Р.Ф. ГАБАСОВ, О.П. ЯРМОШ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С ОДНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ФАЗОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ*

Methods of calculation of open-loop and closed-loop solutions of the system with a lagging phase variable are illustrated on a second-order system. Construction of quasireduction of the fundamental matrix of solutions of the considered system is a base of the dual method.

Существуют два взгляда на теорию оптимального управления (ОУ). Согласно первому, который появился после открытия Понтрягиным принципа максимума, теория ОУ - раздел современного (неклассического) вариационного исчисления, второй взгляд трактует ее как раздел современной теории управления, представляющей собой естественное развитие классического варианта. В соответствии с этим в первом случае под управлениями понимаются элементы функциональных пространств, по которым отыскивается экстремум выбранного функционала качества, и основным вопросом теории считается анализ решения экстремальной задачи (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности и т. п.) - Во втором случае управление - это процесс, в котором в каждый текущий момент времени формируются целенаправленные воздействия на объект управления в зависимости от доступной к этому моменту информации о поведении объекта и действующих на него возмущениях, и основной вопрос теории состоит в синтезе оптимальных (замкнутых, автоматических) систем управления.

В теории управления рассматриваются три принципа управления: 1) по разомкнутому контуру, 2) по замкнутому контуру, 3) в реальном времени. В соответствии с первым принципом до начала процесса управления по априорной информации строится программа (будущих управляющих воздействий на объект управления), которая в процессе управления не корректируется. Согласно второму принцип текущие управляющие воздействия (позиционные управления) создаются по текущим реализующимся позициям, следуя заранее (до начала процесса управления) составленным правилам, определенным на основе всевозможной информации о поведении объекта и действующих на него возмущениях, которая может появиться в процессе управления. Эти правила в процессе управления не корректируются и реализуются в форме прямых, обратных и комбинированных связей. При использовании третьего принципа

* Авторы статьи - сотрудники кафедры методов оптимального управления.

управления упомянутые связи не создаются, их текущие значения вычисляются в режиме реального времени по ходу процесса управления.

Первые задачи ОУ, поставленные и решенные в конце 1940-х гг., были нацелены на синтез замкнутых систем управления с оптимальными обратными связями. Они использовали детерминированные математические модели, предполагали, что в процессе управления будут доступны точные значения всех фазовых переменных. В новых задачах принципиальную роль играли важные с точки зрения приложений геометрические ограничения на управляющие воздействия, чем они существенно отличались от задач классического вариационного исчисления.

При решении первых задач ОУ инженеры, следуя традициям классической теории управления, в качестве вспомогательных использовали разомкнутые системы управления и строили для них оптимальные программы, которые затем применяли при синтезе оптимальных обратных связей. Основываясь на этих фактах, Л.С. Понтрягин сформулировал новую (неклассическую) вариационную задачу и вместе со своими учениками доказал для нее необходимое условие оптимальности программ в виде фундаментального принципа максимума [1,2]. Дальнейшее развитие теории ОУ шло в основном по пути исследования оптимальных программ. Кроме обыкновенных, были изучены системы с запаздыванием, с частными производными и др.

Проблема же синтеза оптимальных замкнутых систем управления до сих пор остается нерешенной даже для обыкновенных систем как в рамках принципа максимума, так и в рамках второго фундаментального метода теории ОУ - динамического программирования Р. Беллмана [3]. Исключение составляет линейно-квадратичная задача Летова - Калмана для обыкновенных систем, решение которой в силу специфики критерия качества и игнорирования геометрических ограничений на управляющие воздействия имеет вид линейной обратной связи. На системах с запаздыванием аналог задачи Летова - Калмана исследовался многими авторами, но для него пока не получено эффективных конструктивных результатов [4].

Новый подход к проблеме синтеза оптимальных обыкновенных систем управления, ориентированный на принцип ОУ в реальном времени [5], был предложен в [6] и развит в [7-9].

Цель предлагаемой работы - проиллюстрировать построение программного и позиционного решений задачи ОУ одной системой с запаздыванием.

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} x_2(5) \rightarrow \max, \quad \dot{x}_1(t) &= -x_1(t-1) + u_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + u_2(t), \\ x_1(0) &= -3, \quad x_2(0) = 0; \quad x_1(s) = 0, 5s, \quad s \in [-1; 0]; \quad |x_1(5)| \leq 0,1; \\ 0 \leq u_1(t) &\leq 0,4; \quad 0 \leq u_2(t) \leq 0,5, \quad t \in T = [0, 5]. \end{aligned} \quad (1)$$

Задачу (1) будем решать в классе дискретных управляющих воздействий $u(t) \in R^2$, $t \in T$: $u(t) = u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in T_h = \{0, h, \dots, 5-h\}$, $h = 5/N$, N - натуральное число.

Программное решение задачи (1) будем строить двойственным методом [7]. В его основу положим квазиредукцию фундаментальной матрицы решений системы с запаздыванием (1) к матричной функции, которая сколь угодно точно ее аппроксимирует и вычисляется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате для осуществления итерации двойственного метода достаточно будет интегрировать вспомогательные системы обыкновенных дифференциальных уравнений на небольшом количестве периодов квантования.

Фундаментальная матрица решений системы (1) в прямом времени $F_+(t) = F(t, 0) \in R^{2 \times 2}$, $t \in T$, удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \dot{F}_{11}^+(t) = -F_{11}^+(t-1), & \dot{F}_{12}^+(t) = -F_{12}^+(t-1), \\ \dot{F}_{21}^+(t) = F_{11}^+(t) + F_{11}^+(t-1), & \dot{F}_{22}^+(t) = F_{12}^+(t) + F_{12}^+(t-1), \end{cases} t \in T, \quad (2)$$

с начальными условиями $F^+(0) = E$; $F_{(0)}^+(s) = 0$, $s \in [-1, 0[$, где $F_{(0)}^+(t) = (F_{11}^+(t), F_{12}^+(t))$. Решение системы (2) имеет вид

$$F^+(t) = \begin{pmatrix} F_{11}^+(t) & 0 \\ F_{21}^+(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

Для построения квазиредукции матрицы $F^+(t)$, $t \in T$, [7] положим $y^+(t) = F_{11}^+(t)$, $t \in T$, ($y^+(s) = F_{11}^+(s) = 0$, $s \in [-1, 0[$). Исключив $F_{11}^+(t)$, $t \in T$, из системы (2), получим

$$\dot{F}_{21}^+(t) = y^+(t) + y^+(t-1), \quad t \in T.$$

Отрезок T разобьем на промежутки $T_{(l)}^+ = [t_{l-1}^+, t_l^+]$, $l = \overline{1, 5}$, $t_l^+ = l$, $l = \overline{0, 5}$. Аппроксимируем функцию $y^+(t)$, $t \in T_{(l)}^+$, полиномами $P_l^+(t) \in R$, $t \in T_{(l)}^+$, $l = \overline{1, 5}$, степени . Положим $P^+(t) = P_l^+(t)$, $t \in T_{(l)}^+$; $l = \overline{1, 5}$, ($P^+(s) = 0$, $s \in [-1, 0[$). Введем вспомогательное уравнение

$$\dot{\Phi}^+(t) = P^+(t) + P^+(t-1), \quad t \in T. \quad (3)$$

Выберем совокупность моментов $s_f^+ \in T_h$, $f = \overline{1, f^+}$; $0 < s_1^+ < \dots < s_{f^+}^+ < 5$, и сохраним значения $F_{21}^+(s_f^+)$, $f = \overline{1, f^+}$. Пусть $\Phi_f^+(t)$, $t \in [s_f^+, s_{f+1}^+]$, $f = \overline{1, f^+}$, - решения уравнения (3) с начальными условиями $\Phi_f^+(s_f^+) = F_{21}^+(s_f^+)$, $f = \overline{1, f^+}$. Обозначим $\Phi^+(t) = \Phi_f^+(t)$, $t \in [s_f^+, s_{f+1}^+]$; $f = \overline{1, f^+}$.

Рассмотрим случаи:

1) $v = 1$, $f^+ = 0$; $\Phi^+(t)$, $t \in T$, - решение уравнения (3) с $\Phi_+(0) = F_{21}^+(0)$; (точность аппроксимации в метрике $C[0,5]$ равна $\varepsilon_1 = 0,22107$);

2) $v = 1$, $f^+ = 1$, $s_1^+ = 3,3$; $\Phi^+(t)$, $t \in T$, - решение (3) с $\Phi_+(0) = F_{21}^+(0)$; $\Phi^+(3,3) = F_{21}^+(3,3) = 2,48032917$; ($\varepsilon_1 = 0,125$)

3) $v = 2$, $f^+ = 0$; $\Phi^+(t)$, $t \in T$, - решение(3) с $\Phi_+(0) = F_{21}^+(0)$; ($\varepsilon_1 = 0,008019$).

Для всех случаев построим квазиредукцию матрицы $F_+(t)$, $t \in T$:

$$\tilde{F}^+(t) = \begin{pmatrix} P^+(t) & 0 \\ \Phi^+(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

Квазиредукции для 1)-3) используем при построении приближенных решений задачи (1). Для оценки их качества сначала было найдено точное решение (1) в классе дискретных управляющих воздействий с $h = 0,01$. На рис. 1 представлены оптимальные траектории $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$, $t \in T$, задачи (1). Затем в том же классе управляющих воздействий с помощью двойственного метода [7] были построены решения (1) с заменой $F_+(t)$, $t \in T$, на $\tilde{F}^+(t)$, $t \in T$. Полученные результаты сведены в табл. 1, где представлены терминальные значения $x_1^0(5)$, $x_2^0(5)$; опорные и неопорные моменты и значения в них программы

$u_1(t)$, $t \in T$, ($u_2(t) = 0,5$, $t \in T$), Графики приближенных решений зрительно неотличимы от графиков $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ на рис. 1.

Оптимальное управление в реальном времени проиллюстрируем на задаче

$$\begin{aligned} x_2(5) \rightarrow \max, \quad \dot{x}_1(t) &= -x_1(t-1) + u_1(t) + w(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + u_2(t), \\ x_1(0) &= -3, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(s) = 0,5s, \quad s \in [-1; 0]; \quad |x_1(5)| \leq 0,1; \\ 0 \leq u_1(t) &\leq 0,4; \quad 0 \leq u_2(t) \leq 0,5; \quad t \in T = [0, 5], \end{aligned} \quad (4)$$

с возмущением $w^*(t) = (0, 2 \operatorname{sgn} \sin(2\pi t), 0)$, $t \in [0; 3,5[$; $w^*(t) = (0, 0)$, $t \in [3,5; 5]$

Таблица 1

Программное решение задачи ОУ с запаздыванием

$F^*(t)$	$x_1^0(5)$	$x_2^0(5)$	$u_1(t)$	
			t_{on} / u_{low}	t_{off} / u_{up}
$\tilde{F}^*(t)$ ($f^+ = 0, v = 1$)	-0,116	0,622	[1,48; 1,49[/ 0,17	[0; 1,48[/ 0,4 [1,49; 2,25[/ 0 [2,25; 5[/ 0,4
$\tilde{F}^*(t)$ ($f^+ = 1, v = 1, s_1^+ = 3,3$)	-0,092	0,481	[1,42; 1,43[/ 0,268	[0; 1,42[/ 0,4 [1,43; 2,33[/ 0 [2,33; 5[/ 0,4
$\tilde{F}^*(t)$ ($f^+ = 0, v = 2$)	-0,099	0,522	[2,3; 2,31[/ 0,267	[0; 1,45[/ 0,4 [1,45; 2,3[/ 0 [2,31; 5[/ 0,4
$F^*(t)$	-0,1	0,528	[2,3; 2,31[/ 0,129	[0; 1,46[/ 0,4 [1,46; 2,3[/ 0 [2,31; 5[/ 0,4

Для оценки качества метода [7] в классе дискретных управляющих воздействий с периодом квантования $h = 0,25$ предварительно была построена точная реализация $u^*(t)$, $t \in T$, оптимальной обратной связи (позиционного решения) задачи (4). Графики траекторий $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $t \in T$, системы (4) изображены на рис. 2. Для приближенной реализации оптимальной обратной связи задачи (4) использовалась квазиредукция $\tilde{F}^*(t)$, $t \in T$, для случая 3). Графики приближенных решений зрительно неотличимы от графиков на рис. 2. Численные результаты сведены в табл. 2, где представлены терминальные значения $x_1^*(5)$, $x_2^*(5)$ и значения $u_1^*(t)$, $t \in T$, ($u_2^*(t) = 0,5$, $t \in T$) реализации оптимальной обратной связи.

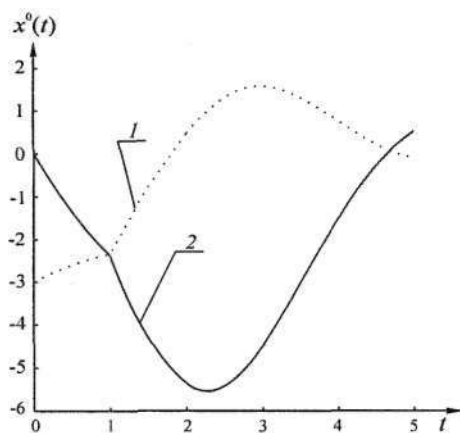


Рис. 1. Оптимальные траектории задачи (1):

1 — $x_1^0(t)$, $t \in T$; 2 — $x_2^0(t)$, $t \in T$

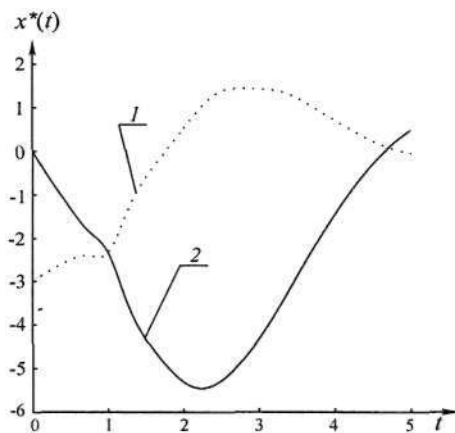


Рис. 2. Траектории системы (4):

1 — $x_1^*(t)$, $t \in T$; 2 — $x_2^*(t)$, $t \in T$

Трудоемкость вычисления [8] текущих значений оптимальной обратной связи не превысила 0,05.

Таблица 2

Позиционное решение задачи ОУ с запаздыванием

$F^*(t)$	$x_1^*(5)$	$x_2^*(5)$	$t / u_1^*(t)$
$\tilde{F}^*(t)$ ($f^+ = 0, v = 2$)	-0,059	0,493	[0; 1,25[/ 0,4; [1,25; 1,5[/ 0,287; [1,5; 2[/ 0; [2; 2,25[/ 0,278; [2,25; 2,5[/ 0,217; [2,5; 2,75[/ 0,054; [2,75; 3[/ 0,27; [3; 5[/ 0,4
$F^*(t)$	-0,054	0,47	[0; 1,25[/ 0,4; [1,25; 1,5[/ 0,081; [1,5; 2[/ 0; [2; 2,25[/ 0,027; [2,25; 2,5[/ 0,171; [2,5; 2,75[/ 0,117; [2,75; 5[/ 0,4

Таким образом, для ОУ в реальном времени системой (4) можно использовать вычислительные устройства, которые способны проинтегрировать уравнение (3) на промежутке [0, 5] за время, не превышающее 0,25/0,05 единиц, в которых измеряется h .

Работа финансируется БРФФИ (грант Ф06М-027).

- 1.Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
- 2.Федоренко Р.П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. М., 1978.
- 3.Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
- 4.Ким А.В., Рублев С.С., Чей Е.С.//Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т.П. № 1.С. П.
- 5.Габасов Р., Кириллова Ф.М.// Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 15.
- 6.Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О. И.//Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.
- 7.Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ярмош О.П. // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 6. С. 28.
- 8.Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. В 2 ч. Ч. 1. Линейные задачи. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 13.09.05.

Рафаил Федорович Габасов - доктор физико-математических наук, профессор.

Ольга Петровна Ярмош - аспирант. Научный руководитель - Р.Ф. Габасов.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x), \quad x > a, \quad (1)$$

α

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \quad (2)$$