и (единственное) решение задачи (1) *дается формулой* (5) *при* $P(z) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Ф14КАЗ-034 «Операторные методы решения общих краевых задач для уравнений с частными производными и их приложения».

Литература

1. Урбанович Т. М. *Особый случай краевой задачи Римана* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58. № 6. С. 18–21.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОСТРОЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Чеб

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by

Рассматривается граничная задача для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, оператор которого представим в виде композиции операторов второго порядка. Аналитическое решение граничной задачи ищется методом характеристик по следующей схеме. Сначала с помощью характеристик уравнения находится его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет начальным и граничным условиям. Таким методом автором работы решались смешанные задачи для уравнений второго и, в частности, четвертого порядка [1].

В полуполосе $Q = (0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to \to u(t,x)$ рассмотрим нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами, которое запишем в виде

$$\mathcal{L}u = (\partial_t - a^{(1)}\partial_x)^2(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)^2 u(t,x) = 0, \tag{1}$$

где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0,l)$, $l > 0$, $l \in \mathbb{R}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $a^{(1)} \neq a^{(2)}$. К уравнению (1) присоединяем условия Коши

$$\partial_t^j u(0,x) = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Чтобы задача (1), (2) имела единственное решение, на оставшейся части границы ∂Q области Q, т. е. при $x = 0$ и $x = l$, для искомой функции u дополнительно задаются граничные условия

$$\partial_x^s u(t,0) = \mu_s(t), \quad \partial_x^s u(t,l) = \nu_s(t), \quad s = 0,1, \quad t \in (0,\infty). \tag{3}$$

Условия (3) не всегда делают задачу (1)–(3) корректно поставленной. Выбор граничных условий, вид и задание их для всех $t \in [0,\infty)$ при $x = 0$ и $x = l$ зависит от коэффициентов $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. В [1] построено классическое решение задачи (1)–(3) для уравнения (1) в случае, когда $a^{(1)} = a^{(2)} = a$. Сейчас предполагается, что числа $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ имеют разные знаки. Для определенности считаем, что $a^{(1)} < 0$, $a^{(2)} > 0$, $|a^{(1)}| < |a^{(2)}|$.

Лемма 1. *Общее решение уравнения* (1) *из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций* $C^4(\mathbb{R}^2)$ *представляется в виде суммы*

$$u(t,x) = g_1(x + a^{(1)}t) + (x + a^{(2)}t)g_1(x + a^{(1)}t) + g_3(x + a^{(2)}t) + (x + a^{(1)}t)g_4(x + a^{(2)}t), \tag{4}$$

где g_1, g_2, g_3 *и* g_4 *— любые функции из* $C^4(\mathbb{R}^2)$ *от аргументов* $x + a^{(1)}t$ *и* $x + a^{(2)}t$ *соответственно,* $g_1, g_2 : (-\infty, l] \ni y \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $g_3, g_4 : [0,\infty] \ni y \to g_{i+2}(y) \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$.

Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям (3). Смешанная задача (1)–(3) будет решена, если мы сумеем определить функции g_1, g_2, g_3 и g_4 в представлении (4) и при этом будут выполняться начальные (2) и граничные условия (3). Перейдем к их определению.

Удовлетворяя (4) начальным условиям (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой определяются функции g_1, g_2, g_3 и g_4, когда $x \in [0, l]$.

Для других x из области определения g_1, g_2, g_3, g_4 их значения находим из граничных условий (2) пошагово. Обозначим $g_i(x)$ для $x \in [0, l]$ через $g_i^{(0)}(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Сначала рассмотрим условие на левой границе $x = 0$. Получим систему уравнений вида

$$g_1(a^{(1)}t) + a^{(2)}tg_2(a^{(1)}t) + g_3(a^{(2)}t) + a^{(1)}tg_4(a^{(2)}t) = \mu_1(t),$$

$$g_2(a^{(1)}t) + g_4(a^{(2)}t) + g_1^{'}(a^{(1)}t) + a^{(2)}tg_2^{'}(a^{(1)}t) + g_3^{'}(a^{(2)}t) + a^{(1)}tg_4^{'}(a^{(2)}t) = \mu_2(t). \tag{5}$$

Если аргумент $a^{(2)}t \in [0, l]$ в (5), то функции g_3, g_4 известны из решения задачи Коши как $g_3^{(0)}$, $g_4^{(0)}$, а из системы (5) находятся выражения для функций $g_1^{(1)}$, $g_2^{(1)}$, когда их аргументы $x \in [\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}}l, 0]$. Далее переходим к рассмотрению граничного условия на правой границе $x = l$, которое приводит к системе, аналогичной системе (5). Предполагая опять, что аргумент $l + a^{(1)}t \in [0, l])$, т. е. функции $g_1^{(0)}$, $g_2^{(0)}$ определены, находятся выражения для функций $g_3^{(1)}$, $g_4^{(1)}$, когда их аргументы $x \in [l, l - \frac{a^{(2)}}{a^{(1)}}\, l]$.

Таким образом, определяются по рекуррентным соотношениям $g_1^{(n)}(x), g_2^{(n)}(x)$ для $x \in$ $\in [[\frac{n+1}{2}]\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}}\, l - [\frac{n}{2}]\, l,\, l - [\frac{n+1}{2}]\, l + [\frac{n}{2}]\dfrac{a^{(1)}}{a^{(2)}}\, l]$, $g_3^{(n)}(x), g_4^{(n)}(x)$ для $x \in [[\frac{n+1}{2}]\, l - [\frac{n}{2}]\frac{a^{(2)}}{a^{(1)}}\, l,\ l + [\frac{n}{2}]\, l -$ $- [\frac{n+1}{2}]\frac{a^{(2)}}{a^{(1)}}\, l]$. В заключении требуется непрерывность этих функций и их производных до четвертого порядка включительно в точках стыка.

Теорема. *Предположим, что функции* $\varphi_0 \in C^5[0, l]$, $\varphi_1 \in C^4[0, l]$, $\varphi_2 \in C^3[0, l]$, $\varphi_3 \in$ $\in C^2[0, l]$, $\mu_1, \nu_1 \in C^5[0, \infty]$, $\mu_2, \nu_2 \in C^4[0, \infty]$ *и выполняются условия согласования*

$$\frac{d^j\mu_1(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \varphi_j(0), \quad \frac{d^j\mu_2(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \varphi_j^{'}(0), \quad \frac{d^j\nu_1(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \varphi_j(l), \quad \frac{d^j\nu_2(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \varphi_j^{'}(l), \quad j = \overline{0, 3},$$

$$\mu_1^{(4)}(0) = 2(a^{(1)} + a^{(2)})\varphi_3^{'}(0) - ((a^{(1)})^2 + 4a^{(1)}a^{(2)} + (a^{(2)})^2)\varphi_2^{(2)}(0) +$$
$$+ 2a^{(1)}a^{(2)}(a^{(1)} + a^{(2)})\varphi_1^{(3)}(0) - (a^{(1)})^2(a^{(2)})^2\varphi_0^{(4)}(0),$$

$$a^{(1)}\mu_2^{(4)}(0) = -((a^{(1)})^2 + 2a^{(1)}a^{(2)} + 3(a^{(2)})^2)\varphi_3^{(2)}(0) + ((a^{(1)})^3 + 4(a^{(1)})^2a^{(2)} + 7a^{(1)}(a^{(2)})^2 + 2(a^{(2)})^3)\times$$
$$\times\varphi_2^{(3)}(0) - a^{(1)}a^{(2)}(2(a^{(1)})^2 + 5a^{(1)}a^{(2)} + 4(a^{(2)})^2)\varphi_1^{(4)}(0) + (a^{(1)})^2(a^{(2)})^2(a^{(1)} + 2a^{(2)})\varphi_0^{(5)}(0) + \mu_1^{(5)}(0),$$

$$\nu_1^{(4)}(0) = 2(a^{(1)} + a^{(2)})\varphi_3^{'}(l) - ((a^{(1)})^2 + 4a^{(1)}a^{(2)} + (a^{(2)})^2)\varphi_2^{(2)}(l) +$$
$$+ 2a^{(1)}a^{(2)}(a^{(1)} + a^{(2)})\varphi_1^{(3)}(l) - (a^{(1)})^2(a^{(2)})^2\varphi_0^{(4)}(l),$$

$$a^{(2)}\nu_2^{(4)}(0) = -(3(a^{(1)})^2 + 2a^{(1)}a^{(2)} + (a^{(2)})^2)\varphi_3^{(2)}(l) + (2(a^{(1)})^3 + 7(a^{(1)})^2a^{(2)} + 4a^{(1)}(a^{(2)})^2 + (a^{(2)})^3)\times$$
$$\times\varphi_2^{(3)}(l) - a^{(1)}a^{(2)}(4(a^{(1)})^2 + 5a^{(1)}a^{(2)} + 2(a^{(2)})^2)\varphi_1^{(4)}(l) + (a^{(1)})^2(a^{(2)})^2(2a^{(1)} + a^{(2)})\varphi_0^{(5)}(0) + \nu_1^{(5)}(0).$$

Тогда в классе $C^4(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3).

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ле Тхи Тху. *Решение первой смешанной задачи для нестрого биволнового уравнения* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 4. С. 5–13.