Эта запись позволяет рассматривать элементы $W^{p,k}(\mathbb{R})$ как функции с контролируемыми колебаниями на разных масштабах.

Другим средством для описания колебаний функции на разных масштабах, помимо анализа Фурье, является теория случайных блужданий. Говоря неформально, случайные блуждания размывают неоднородности начального условия с различной скоростью, в зависимости от их размера.

Рассмотрим броуновское движение на прямой как случайное симметричное блуждание. Соответствующая полугруппа операторов $P_t,\ t \geqslant 0,$ которую можно рассматривать в любом из пространств $L^p(\mathbb{R}),$ имеет вид

$$(P_t u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-(x-y)^2}{2t}\right\} u(y)\,dy.$$

Мы можем сказать, используя операторы из данной полугруппы, что функции Соболева $u \in W^{p,k}(\mathbb{R})$ — это в точности функции, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda^{-kj/2}(P_{\lambda^j}u - P_{\lambda^{j+1}}u) \in L^p(\mathbb{R}),$$

где $\lambda > 1$ — произвольная вспомогательная константа.

В докладе демонстрируется, как данный подход позволяет определить функции Соболева на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения

$$\mu(B[x,2r]) \leqslant c\mu(B[x,r]).$$

Данный подход сравнивается с альтернативным подходом Хайлаша к определению функций Соболева на метрических пространствах, который в свою очередь базируется на рассуждениях Кальдерона.

СИММЕТРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КРАМЕРСА

В.И. Стогний[1], **С.С. Коваленко**[2], **И.Н. Копась**[1]

[1] Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
valeriy_stogniy@mail.ru, innak@inet.ua
[2] Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка, Полтава, Украина
kovalenko@imath.kiev.ua

Рассматривается уравнение

$$u_t = u_{yy} - yu_x + (\omega^2 x + y)u_y + u, \tag{1}$$

где $u = u(t,x,y)$ — искомая функция, $u_t = \partial u/\partial t,\ u_x = \partial u/\partial x,\ u_y = \partial u/\partial y,\ u_{yy} = \partial^2 u/\partial y^2;$ ω — некоторая действительная постоянная, удовлетворяющая условию $\omega^2 < 1/4.$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения Крамерса [1]

$$u_t = u_{yy} - (yu)_x + ((V'(x) + y)u)_y, \tag{2}$$

которое описывает движение частицы в флуктуирующей среде с внешним потенциалом $V(x),$ изменение которого определяет силу, действующую на частицу.

Исследование уравнения (2) методами группового анализа дифференциальных уравнений было начато в работе [2], где для свободного уравнения Крамерса $(V'(x) = 0)$ была найдена максимальная алгебра инвариатности, операторы которой были использованы для построения точных инвариантных решений этого уравнения [3]. В статье [4] была проведена групповая классификация по функциональному параметру $V(x)$ уравнений вида (2), из которой, в частности, следует, что максимальная алгебра инвариантности $A^{\max}$ уравнения (1) генерируется такими операторами:

$$X_i = e^{\mu_i t}(\partial_x + \mu_i \partial_y), \quad X_{i+2} = e^{-\mu_i t}(\partial_x - \mu_i \partial_y + (\mu_i y - \omega^2 x)u\partial_u),$$

$$X_5 = \partial_t, \quad X_6 = u\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u,$$

где μ_i $(i = 1, 2)$ — корни уравнения $\mu^2 + \mu + \omega^2 = 0$, $\beta = \beta(t, x, y)$ — произвольное гладкое решение уравнения (1).

Одним из применений симметрийных свойств линейных дифференциальных уравнений с частными производными есть построение в явном виде их фундаментальных решений.

Фундаментальное решение уравнения (1) в явном виде в елементарных функциях было получено С. Чандрасекаром в статье [5]:

$$u = \frac{\theta(t)e^t}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ -\frac{A(t)x^2 + B(t)xy + C(t)y^2}{2\Delta} \right\}, \tag{3}$$

где $\theta = \theta(t)$ — функция Хевисайда; функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и Δ соответственно равны

$$A(t) = 4\omega^2 e^t + (1 - 4\omega^2)e^{2t} + \mu_1 e^{-2\mu_2 t} + \mu_2 e^{-2\mu_1 t}, \quad B(t) = 4e^t - 2e^{-2\mu_2 t} - 2e^{-2\mu_1 t},$$

$$C(t) = 4e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2}e^{2t} + \frac{1}{\mu_1}e^{-2\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_2}e^{-2\mu_1 t}, \quad \Delta = 8e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2}(e^{2t} + 1) - \frac{1}{\omega^2}(e^{-2\mu_1 t} + e^{-2\mu_2 t}).$$

Исследуем вопрос построения фундаментального решения (3) на основе использования максимальной алгебры инвариантности $A^{\max}$ уравнения (1).

Используя алгоритм Аксенова — Береста [6, 7] найдена алгебра инвариантности фундаментальных решений уравнения (1). Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение*

$$u_t - u_{yy} + yu_x - (\omega^2 x + y)u_y - u = \delta(t, x, y), \tag{4}$$

которое определяет фундаментальные решения уравнения (1) $(\delta = \delta(t, x, y)$ — *функция Дирака*), *допускает нетривиальную* 2 *-мерную алгебру Ли операторов симметрии с таким набором базисных операторов*:

$$Y_1 = \{(\mu_1 - \mu_2)e^{\mu_1 t} - e^{-\mu_1 t} - 2\mu_1 e^{-\mu_2 t}\}\partial_x + \{(\mu_1^2 - \omega^2)e^{\mu_1 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t}\}\partial_y +$$
$$+\{(\omega^2 e^{-\mu_1 t} + 2\mu_1\omega^2 e^{-\mu_2 t})x - (\mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t})y\}u\partial_u,$$
$$Y_2 = \{(\mu_1 - \mu_2)e^{\mu_2 t} + 2\mu_2 e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t}\}\partial_x + \{(\omega^2 - \mu_2^2)e^{\mu_2 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_1 t} - \mu_2 e^{-\mu_2 t}\}\partial_y +$$
$$+\{-(2\mu_2\omega^2 e^{-\mu_1 t} + \omega^2 e^{-\mu_2 t})x + (2\omega^2 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t})y\}u\partial_u.$$

Легко убедится, что фундаментальное решение (3) инвариантно относительно операторов Y_1 и Y_2. Отсюда непосредственно следует

Теорема 2. *Фундаментальное решение* (3) *уравнения* (1) *инвариантно относительно* 2 *-параметрической группы точечных преобразований, которая соответствует алгебре Ли* $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ *операторов симметрии уравнения* (4).

Теорема 2 дает возможность конструктивно строить фундаментальное решение (3) уравнения (1) как обобщенное инвариантное решение уравнения (4) (см., например, [6]).

Литература

1. Гардинер К. В. *Стохастические методы в естественных науках.* М.: Мир, 1986.
2. Shtelen W. M., Stogny V. I. *Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker — Planck equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. Vol. 22. P. L539–L543.
3. Saied E. A. *On the similarity solutions for the free Kramers equation* // Appl. Math. Comp. 1996. Vol. 74. P. 59–63.
4. Spichak S. V., Stogniy V. I. *Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation* // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. P. 3505–3510.
5. Chandrasekhar S. *Stochastic problems in physics and astronomy* // Rev. Modern Phys. 1943. Vol. 15. P. 1–89.
6. Берест Ю. Ю. *Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений* // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 1958–1970.
7. Аксенов А. В. *Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения* // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ ЭКСИТОНОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ

Д.В. Туртин[1,2], М.А. Степович[1,2], А.Н. Поляков[1]

[1] Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия
[2] Ивановский филиал Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, Иваново, Россия
turtin@mail.ru, m.stepovich@rambler.ru, andrei–polyakov@mail.ru

В работе [1], направленной на изучение диффузии экситонов в полупроводниковом материале, были приведены одномерные и двухмерные математические модели, описываемые соответственно граничными задачами для обыкновенного дифференциального уравнения на луче и уравнения в частных производных от двух переменных в положительной полуплоскости.

В развитии подходов, предложенных нами ранее [2, 3], методами математического анализа изучена модель диффузии экситонов, генерированных электронным зондом в монокристаллическом полупроводниковом материале. Модель разработана для полупространства и описывается уравнением

$$\partial c/\partial t = D\Delta c - c/\tau \tag{1}$$

при начальном условии

$$c(x, y, z, 0) = n(x, y, z). \tag{2}$$

Здесь $c(x, y, z, t)$ — концентрация экситонов в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t, D — коэффициент диффузии экситонов, τ — время их жизни, а функция $n(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию экситонов в состоянии квазиравновесия:

$$\Delta n - n/\lambda^2 = -\Phi(x, y, z), \tag{3}$$

где $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина экситонов, а $\Phi(x, y, z)$ — функция источника генерации экситонов, заданная трехмерным распределением Гаусса и граничными условиями

$$D\partial n/\partial z|_{z=0} = v_s n(x, y, 0), \quad n(\infty) = 0. \tag{4}$$

Здесь v_s — скорость поверхностной рекомбинации экситонов.