то единственные классические решения $u \in C^2(G)$ смешанной задачи (1)–(3) в $G_- = \{\{x, t\} \in G : x > at\}$ имеют вид известной формулы Даламбера и в $G_+ = \{\{x, t\} \in G : x \leq at\}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{\varphi(x+at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau + \nu(at-x) \left\{ \int_0^{t-x/a} \frac{a^2}{\nu^2(a\eta)} \int_0^\eta \frac{\nu(a\rho)}{\theta(\rho)} \times \right. \\
 & \times \left[\mu(\rho) - \theta(\rho) \frac{a\varphi''(a\rho) + \psi'(a\rho)}{2a} - (a\alpha(\rho) + \beta(\rho)) \frac{a\varphi'(a\rho) + \psi(a\rho)}{2a} - \gamma(\rho) \left(\frac{\varphi(a\rho) + \varphi(0)}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2a} \int_0^\rho \psi(\sigma) d\sigma \right) \right] \exp \left\{ a \int_\eta^\rho \frac{a\alpha(s) - \beta(s)}{\theta(s)} ds \right\} d\rho d\eta - \frac{1}{2} \int_0^{t-x/a} \frac{a^2}{\nu^2(a\rho)} \int_0^\rho \frac{a\nu(a\eta)}{\theta(\eta)} \times \\
 & \times \left(\frac{2}{a} \theta(\eta) \int_0^\eta f^{(1,0)}(a\eta - a\tau, \tau) d\tau + 2\alpha(\eta) \int_0^\eta f(a\eta - a\tau, \tau) d\tau + \frac{\gamma(\eta)}{a} \int_0^\eta \int_{a(\tau-\eta)}^{a(\eta-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau \right) \times \\
 & \times \exp \left\{ a \int_\rho^\eta \frac{a\alpha(s) - \beta(s)}{\theta(s)} ds \right\} d\eta d\rho - \frac{a\varphi'(0) - \psi(0)}{2a} \nu(0) \int_0^{t-x/a} \frac{a}{\nu^2(a\rho)} \exp \left\{ a \int_\rho^0 \frac{a\alpha(s) - \beta(s)}{\theta(s)} ds \right\} d\rho \Big\},
 \end{aligned}$$

где одним и двумя штрихами над функциями соответственно обозначены их первая и вторая производные, символом $(1, 0)$ над $f(y, \tau)$ — ее первая частная производная по y , $C^{(0,1)}(\Omega)$ — множество непрерывных по x и непрерывно дифференцируемых по t функций и $C^{(1,0)}(\Omega)$ — множество непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по t функций на Ω .

Впервые явные формулы классических решений смешанной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны (1) при $f = 0$ с нестационарной первой косою производной в граничном условии (2) при $\theta = 0$ были найдены методом характеристик в [1].

Литература

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косою производной в нестационарном граничном условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПОЧВ РЕГИОНА ЧУМРА

Ф.Д. Микайылов¹, Ф. Ер²

¹ Университет Ыгдыр, кафедра почвоведения, 76000, Ыгдыр, Турция
fariz.m@igdir.edu.tr

² Университет Сельчук, 42500, Чумра/Конья, Турция
aserol@selcuk.edu.tr

Одномерное распространение тепла в почве описывается следующим уравнением [1–6]:

$$T'_t = \kappa T''_{xx}. \quad (1)$$

В работе рассматриваются его аналитические решения при граничном условии на поверхности:

$$T(0, t) = \varphi(t) = T_0 + \sum_{j=1}^m T_j \cos(j\omega t + \varepsilon_j), \quad (2)$$

а также при условии, что температура почвы на нижней границе не меняется:

$$\partial T(L, t) / \partial x = 0. \quad (3)$$

Здесь $T(x, t)$ — температура почвы в точке (x, t) ; κ — коэффициент температуропроводности, T_0 — среднесуточная температура деятельной поверхности почвы (ТДПП); T_j — амплитуда колебаний ТДПП; $\omega = 2\pi/\tau_0$ — суточная частота; τ_0 — период волны; ε — сдвиг фазы.

Можно показать, что решение (1) при граничных условиях (2) и (3) имеет вид [1]:

$$T(y, \tau) = T_0 + \sum_{j=1}^m \Phi_j(y, b_j) \cos[j\bar{\omega}\tau + \varepsilon_j - \psi_j(y, b_j)] \quad (4)$$

где $y = x/L$, $\tau = \kappa t/L^2$, $b_j = \sqrt{j\bar{\omega}/2}$, $\bar{\omega} = \omega L^2/\kappa$ и функции $\Phi_j(b_j, y)$ и $\psi_j(y, b_j)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_j(b_j, y) &= T_j \sqrt{\frac{\text{ch}(d_j) + \cos(d_j)}{\text{ch}(2b_j) + \cos(2b_j)}}, \quad d_j = 2b_j(1 - y), \\ \psi_j(y, b_j) &= \arctg \left[\frac{\text{sh}(q_j) \sin(b_j y) + \text{sh}(b_j y) \sin(q_j)}{\text{ch}(q_j) \cos(b_j y) + \text{ch}(b_j y) \cos(q_j)} \right], \quad q_j = b_j(2 - y). \end{aligned} \quad (5)$$

Среднеинтегральное решение уравнения (1) при граничных условиях (2) и (3) имеет вид:

$$\bar{T}(\tau) = \int_0^1 T(y, \tau) dy = T_0 + \sum_{j=1}^m M_j(b_j) \cos[j\bar{\omega}\tau + \varepsilon_j - \hat{\psi}_j(b_j)], \quad (6)$$

где

$$M_j(b_j) = \frac{T_j \sqrt{\text{sh}^2(2b_j) + \sin^2(2b_j)}}{\sqrt{2} b_j [\text{ch}(2b_j) + \cos(2b_j)]}, \quad \hat{\psi}_j(b_j) = \arctg \left[\frac{\sin(2b_j) - \text{sh}(2b_j)}{\sin(2b_j) + \text{sh}(2b_j)} \right]. \quad (7)$$

Используя (4) и (6), для $m = 2$ можно вывести формулу для определения κ для произвольного периода τ_0 и безразмерной глубины y . Для этого необходимо знать распределение температуры в почвенном слое $[0, L]$ на расчетном интервале времени τ_0 .

Используя решение (4) для $m = 2$, для безразмерной глубины y и времени $t_i = i\tau_0/8$ напишем следующие восемь уравнений:

$$T(y, t_i) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cos\left(\frac{\pi}{4}i + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cos\left(\frac{\pi}{2}i + \alpha_2\right), \quad i = \overline{1, 8}. \quad (8)$$

После преобразований уравнений (8) имеем:

$$\sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2 = 8\Phi_1^2(y, b_1). \quad (9)$$

Учитывая обозначения (5) для $\Phi_1(y, b_1)$ и $K_1(b_1, y)$ из равенства (9) получаем выражение:

$$\frac{1}{8T_1^2} \sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2 = \frac{\text{ch}[2b_1(1 - y)] + \cos[2b_1(1 - y)]}{\text{ch}(2b_1) + \cos(2b_1)}. \quad (10)$$

Аналогичным образом из представления (6) для $m = 2$ получаем среднеинтегральную формулу для определения κ для произвольного периода τ_0 :

$$\sum_{i=1}^4 [\bar{T}(t_i) - \bar{T}(t_{i+4})]^2 = 8M_1^2(b_1). \quad (11)$$

Функции Φ_1 и M_1 в уравнениях (9) и (10) определяются соответственно из (5) и (7).

Для определения коэффициента κ с использованием формулы (10) необходимы величины T_1 , τ_0 , $T(y_*, t_i^*)$ — значения температуры почвенного слоя $[0, L]$ на произвольной глубине $y_* = y = x_*/L$ для $t_i^* = i\tau_0^*/4$, $i = \bar{1}, 8$. Например, если $\tau_0^* = 24$ ч, то $t^* = 3, 6, \dots, 24$ ч. Имея эти данные, вычисляем $[T(y_*, t_i^*) - T(y_*, t_{i+4}^*)]$ для всех $i = \bar{1}, 8$. Далее, κ определяем по формуле (10) методом подбора значения параметра b_1^* на ЭВМ исходя из условия совпадения левой и вычисленной по исходным данным правой части т. е.: $\sum_{i=1}^4 [T(y_*, t_i^*) - T(y_*, t_{i+4}^*)]^2 / (8T_1^2)$. Из соотношения $b_1^* = \sqrt{\omega L^2 / 2\kappa}$ находим значение κ на глубине $x = x_*$, которое равно

$$\kappa^* = \frac{\pi L^2}{\tau_0 (b_1^*)^2}. \quad (12)$$

Используя формулу (6), можно находить κ на основе экспериментальных данных по температуре в почвенном слое $[0, L]$, т. е. $\bar{T}(t_i)$, а также T_1 . В этом случае подбор значения параметра b_1^* осуществляется по формуле

$$\frac{1}{8T_1^2} \sum_{i=1}^4 [\bar{T}(t_i) - \bar{T}(t_{i+4})]^2 = \frac{\text{sh}^2(2b_1) + \sin^2(2b_1)}{2b_1^2 [\text{ch}(2b_1) + \cos(2b_1)]^2}. \quad (13)$$

В отличие от методов в [1], здесь для определения коэффициента κ необходимо знать распределение температуры $T(y_*, t_i)$ по времени в почвенном слое $[0, L]$ на произвольной безразмерной глубине $y_* = x/L$ и $\bar{T}(t_i)$ для *восьми моментов времени*, что позволяет с более высокой точностью определить параметр κ по формулам (10)–(13).

Литература

1. Микайылов Ф. Д., Шейн Е. В. *Теоретические основы экспериментальных методов определения температуропроводности почв* // Почвоведение. 2010. № 5. С. 597–605.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнение математической физики*. М.: Наука, 1966. 724 с.
3. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв*. М.: Наука, 1976. 352 с.
4. Шейн Е. В. *Курс физики почв*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. 432 с.
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1986. 510 p.
6. Juri W. A., Gardner W. R., Gardner W. H. *Soil Physics*. New York, 1991. 328 p.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ ТИПА (2, 3, 5, 8)

Д.И. Пирштук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

Введение. В докладе рассматривается проблема интегрирования нормальных экстремалей для следующего обобщения задачи Дидоны [1]. Пусть на плоскости даны две точки (x_0, y_0) , $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные гладкой кривой γ_0 . Требуется соединить эти точки другой гладкой кривой γ минимальной длины, такой, чтобы область D , ограниченная γ_0 и γ имела фиксированные площадь S , центр тяжести s и центр момента инерции M .