

Стандартным образом доказывается

Лемма 1 [2]. Если в H операторы $A(t)$ самосопряжены, положительны и имеют в H ограниченные обратные $A^{-1}(t)$ и множество $D(L)$ плотно в $\mathcal{H}$, то оператор L задачи Гурса допускает замыкание (сильное расширение) $\bar{L} = \{\bar{\mathcal{L}}(t), l_1, l_2\} : E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$.

Определение. Решения $u \in D(\bar{L})$ операторного уравнения $\bar{L}u = \Phi$, $\Phi \in F$, называются сильными решениями абстрактной задачи Гурса (1)–(4).

Сформулируем основную теорему об энергетическом неравенстве для оператора $\bar{L}$.

Теорема 1. Пусть в H операторы $A(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1, ограничены линейные операторы $A_i(t)$, $A_0(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(\mathcal{T}, \mathcal{L}(H, H))$, $i = 1, 2$, где $A^{-1/2}(t)$ — обратные к операторам $A^{1/2}(t)$, и существуют слабые частные производные первого порядка $A'_{t_i}(t)$, $i = 1, 2$, по t_i на $D(A(t))$ в смысле работы [3]. Если существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что имеют место неравенства

$$\langle A'_{t_i}(t)u, u \rangle_{(t)} \leq c_1 |A^{1/2}(t)u|^2, \quad \forall u \in D(A(t)), \quad t \in \mathcal{T}, \quad i = 1, 2,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$ — полуторалинейная форма двойственности между пространствами $W^-(t)$ и $W^+(t)$, то для сильных решений абстрактной задачи Гурса (1)–(4) выполняется энергетическое неравенство, т. е. существует не зависящая от u постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$\|u\|_E^2 \leq c_0 \|\bar{L}u\|_F^2, \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_0 = \exp\{\max\{c_1, 2\}(T_1 + T_2)\}.$$

Литература

1. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 6. С. 1017–1030.
2. Ломовцев Ф. Е., Мотевич А. В. Двумерная задача Гурса для полных дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2013. № 2. С. 109–117.
3. Ломовцев Ф. Е. Дифференцирование по параметру линейных операторов с зависящей от параметра областью определения // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 445. № 6. С. 628–630.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ОБЩЕГО ВИДА ПРИ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРВЫХ КОСЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ф. Е. Ломовцев, Ю. Ф. Новик

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
lomovcev@bsu.by, overon@tut.by

Найдены классические решения $u \in C^2(G)$ смешанной задачи:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad \{x, t\} \in G = [0, d] \times [0, \infty[, \quad (1)$$

$$\Gamma_i(t)u \equiv [\alpha_i(t)\partial_t u + \beta_i(t)\partial_x u + \gamma_i(t)u]|_{x=d(i-1)} = \mu_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq d. \quad (3)$$

Из гладкости решений $u \in C^2(G)$, уравнения (1) и условий (2), (3) выводим необходимые требования (часть для f) гладкости

$$f \in C(G), \quad \mu_i \in C^1[0, \infty[, \quad \varphi \in C^2[0, d], \quad \psi \in C^1[0, d], \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

В граничных условиях (2) полагаем $t = 0$, вычисляем значения следов слагаемых последовательно при $x = 0$ и $x = d$ с помощью начальных условий (3) и уравнения (1) при $t = 0$ и выводим необходимые условия согласования

$$\begin{aligned} \alpha_i(0)\psi(d^{(i)}) + \beta_i(0)\varphi'(d^{(i)}) + \gamma_i(0)\varphi(d^{(i)}) &= \mu_i(0), \\ \alpha_i(0)[f(d^{(i)}, 0) + (a_2 - a_1)\psi'(d^{(i)}) + a_2a_1\varphi''(d^{(i)}) - (b_2 + b_1)\psi(d^{(i)}) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(d^{(i)}) - b_2b_1\varphi(d^{(i)})] + \\ + (\alpha'_i(0) + \gamma_i(0))\psi(d^{(i)}) + \beta_i(0)\psi'(d^{(i)}) + \beta'_i(0)\varphi'(d^{(i)}) + \gamma'_i(0)\varphi(d^{(i)}) &= \mu'_i(0), \quad d^{(i)} = d(i-1), \quad i=1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Делим множество G на прямоугольники $G_n = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}]$ и G_n на треугольники:

$$\Delta_{3n-2} = \{\{x, t\} : x > a_1t_n, \quad x + a_2t_n < d, \quad x \in]0, d[, \quad t_n = t - d_n,$$

$$\Delta_{3n-1} = \{\{x, t\} : x \leq a_1t_n, \quad x \in [0, a_1d_2]\}, \quad d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2),$$

$$\Delta_{3n} = \{\{x, t\} : x + a_2t_n \geq d, \quad x \in [a_1d_2, d]\}, \quad t \in [d_n, d_{n+1}], \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество всех k -раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω , $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ — множество всех непрерывных функций на Ω , $C^{(0,1)}(\Omega)$ — множество всех непрерывных по x и непрерывно дифференцируемых по t функций на Ω и $C^{(1,0)}(\Omega)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по t функций на Ω .

Теорема. Пусть $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in C[0, \infty[$, $a_i\alpha_i \neq (-1)^{i+1}\beta_i$, $a_i > 0$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1, 2$. Для смешанной задачи (1)–(3) существуют единственные классические решения $u \in C^2(G)$ вида

$$\begin{aligned} u_{3n-2}(x, t) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left(a_1 e^{-b_2t_n} \varphi_n(x + a_2t_n) + a_2 e^{-b_1t_n} \varphi_n(x - a_1t_n) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-At_n} \int_{x-a_1t_n}^{x+a_2t_n} e^{B(x-s)} [A\varphi_n(s) + \psi_n(s)] ds \right) + F_n^{(1)}(x, t), \\ u_{3n-1}(x, t) &= e^{-b_1t} a_1 \int_{d_n}^{t-x/a_1} e^{a_1 \int_{\rho}^{t-x/a_1} E_1(\nu) d\nu + \rho b_1} \frac{P_{3n-1}(\rho)}{a_1\alpha_1(\rho) - \beta_1(\rho)} d\rho + \Phi_{3n-1}(x, t) + F_n^{(1)}(x, t), \\ u_{3n}(x, t) &= e^{-b_2t} a_2 \int_{d_n}^{t-(d-x)/a_2} e^{a_2 \int_{\rho}^{t-(d-x)/a_2} E_2(\nu) d\nu + \rho b_2} \frac{P_{3n}(\rho)}{a_2\alpha_2(\rho) + \beta_2(\rho)} d\rho + \Phi_{3n}(x, t) + F_n^{(2)}(x, t), \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots$, u_{3n-k} — решения в треугольниках Δ_{3n-k} , $k = 0, 1, 2$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\psi_1(x) = \psi(x)$, $x \in [0, d]$, $\varphi_n(x) = u_{3n+j-4}|_{t=d_n}$, $\psi_n(x) = \partial_t u_{3n+j-4}|_{t=d_n}$, $x \in [ja_1d_2, (a_1 + ja_2)d_2]$, $j = 0, 1$, $n = 2, 3, \dots$,

$$A = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 + a_2}, \quad B = \frac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2}, \quad E_i(t) = \frac{b_i\alpha_i(t) - \gamma_i(t)}{a_i\alpha_i(t) + (-1)^i\beta_i(t)}, \quad p_i(x) = d^{(i)} - (-1)^i x,$$

$$F_n^{(i)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^t e^{A(\tau-t)} \int_{p_i(x)-a_i(t-\tau)}^{p_i(x)+a_{3-i}(t-\tau)} e^{B(x-p_i(s))} f(p_i(|s|), \tau) ds d\tau,$$

$$\Phi_{3n-j}(x, t) = \frac{e^{-b_{1+j}t_n}}{a_1 + a_2} \left\{ a_{2-j}\varphi_n(x - (-1)^j a_{j+1}t_n) + a_{1+j}e^{B(x-(-1)^j a_{j+1}t_n)} \varphi_n(d - dj) + \right.$$

$$+(-1)^j \int_{x-(-1)^j a_{j+1} t_n}^{d-d_j} e^{B(x-(-1)^j a_{j+1} t_n-s)} [A\varphi_n(s) + \psi_n(s)] ds \Big\},$$

$$P_{3n-2+i}(t) = \mu_i(t) - \{\Gamma_i(t)(\Phi_{3n-2+i}(x, t) + F_n^{(i)}(x, t))\}|_{x=d^{(i)}},$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (5) и требования гладкости (4) и интегралы $\int_{d_n}^t e^{b_i \tau} f(|d - |d - x - (-1)^i a_i(t - \tau)||, \tau) d\tau$, $i = 1, 2$, принадлежат множеству $C^{(0,1)}(G_n)$ или множеству $C^{(1,0)}(G_n)$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$

Впервые явные формулы классических решений и достаточные условия корректности на начальные и граничные данные смешанной задачи для простейшего однородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной первой кривой производной в граничном условии получены в [1]. Эти результаты обобщены на простейшее неоднородное уравнение и установлены еще необходимые условия корректности на правую часть, начальные и граничные данные в [2]. Классические решения, необходимые и достаточные условия корректности на правую часть, начальные и граничные данные смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны вида (1) при полунестационарной второй кривой производной в граничном условии выведены в [3].

Литература

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени кривой производной в нестационарном граничном условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.
2. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с кривой производной в нестационарном граничном условии. Вестн. БГУ. Сер. 1. 2012. № 1. С. 83–86.
3. Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй кривой производной в граничном условии // Доклады НАН Беларуси. 2014. Т. 459. № 5. С. 544–549.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ОБЩЕГО ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Ф.Е. Ломовцев, К.А. Спесивцева

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, ksenia.spesivtseva@gmail.com

Выведены рекуррентные формулы классических решений задачи:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad \{x, t\} \in G = [0, d] \times [0, \infty[, \quad (1)$$

$$\partial_x u|_{x=d^{(i-1)}} = \mu_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, d]. \quad (2)$$

Множество G делим на прямоугольники $G^{(n)} = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}]$ и $G^{(n)}$ — на треугольники:

$$\Delta_{3n-2} = \{\{x, t\} : x > a_1 t_n, x + a_2 t_n < d, \quad x \in]0, d[, \quad t_n = t - d_n,$$

$$\Delta_{3n-1} = \{\{x, t\} : x \leq a_1 t_n, \quad x \in [0, a_1 d_2]\}, \quad d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2),$$

$$\Delta_{3n} = \{\{x, t\} : x + a_2 t_n \geq d, \quad x \in [a_1 d_2, d]\}, \quad t \in [d_n, d_{n+1}], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$