

Придерживаясь плана вывода дифференциального уравнения [1], с исправлением допущенных там ошибок. Говоря о мембране, мы подразумеваем упругую свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в состоянии покоя мембрана занимает некоторую прямоугольную область $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ в плоскости xOy , а затем, будучи выведенной из этого состояния, начинает колебаться так, что все ее точки движутся вдоль оси Oz . Перемещение каждой точки мембраны в момент времени t обозначается $u(x, y, t)$ [1].

При выводе уравнения рассматривался внутренний квадратный элемент мембраны, соответствующий интервалам (x_1, x_2) и (y_1, y_2) на осях Ox и Oy соответственно, причем $y_2 - y_1 = x_2 - x_1$. Будем считать, что мембрана имеет постоянную толщину h . Тогда, величины интегральных сил, действующих в плоскости xOy в направлении осей Ox и Oy , приложенных к каждой из сторон рассматриваемого элемента, определяются выражением $T_x = (x_2 - x_1)h\sigma_x$ и $T_y = (y_2 - y_1)h\sigma_y$.

Предполагая, что ρ — это плотность материала мембраны. Тогда можно получить обобщенное уравнение колебания прямоугольной мембраны под действием постоянных разных по величине растягивающих напряжений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где $a_x^2 = \sigma_x / \rho$, $a_y^2 = \sigma_y / \rho$.

Собственные частоты колебаний ω_i прямоугольной пластинки определяются выражением:

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{a \cdot b} \sqrt{b^2 \cdot a_x^2 + a^2 \cdot a_y^2},$$

которое не имеет ничего общего с формулами для вычисления собственных частот прямоугольной мембраны, указанными в известных монографиях [1, 2].

Литература

1. Араманович И. Г., Левин В. И. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1969.
2. Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. *Методы математической физики. Уравнения математической физики*. Томск: Изд-во НТЛ, 2002.

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк, Е.В. Томило

Минск, Беларусь

При изучении колебательных процессов особенно отчетливо проявляется взаимодействие между физикой и математикой — влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на физические знания.

В данной работе впервые получено дифференциальное уравнение поперечных изгибных колебаний призматической балки конечной длины из однородного линейно упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов, решением которого является функция Вебера.

Вывод уравнения изгибных колебаний балки, изложенный в известной монографии В. Л. Бидермана [1], не верен, так как дифференциальное уравнение изгибных колебаний получено из уравнения изогнутой оси балки, выведенного С. П. Тимошенко [2] в случае статического изгиба распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, приложенной на всей длине балки. Отметим также, что получение уравнения у С. П. Тимошенко не достаточно

теоретически обоснованно. Дело в том, что для его получения С. П. Тимошенко использовал уравнения статики плоского упругого тела, а затем применил к ним уравнения перемещений, полученные из технической теории чистого изгиба балок, которые получены на основании гипотез, противоречащих двумерным уравнениям механики твердого тела хотя бы предположением об отсутствии взаимодействия между изгибаемыми в плоскости волокнами. Таким образом, адекватных уравнений, определяющих свободные изгибные колебания балки до настоящего времени не было получено, кроме того, совершенно без внимания остались вопросы влияния структуры композиционного тела на собственные частоты.

Аналогичный В. Л. Бидерману [1] результат получен в учебнике С. П. Стрелкова [3] с использованием перерезывающей силы, что также противоречит гипотезе отсутствия взаимодействия волокон в балке при выводе уравнений технической теории изгиба.

При построении технической теории чистого изгиба призматическую балку постоянной толщины разделяют на элементарные призматические волокна. Под чистым изгибом будем понимать изгиб, при котором продольные призматические волокна в балке не взаимодействуют в поперечном направлении [4].

Предполагается, что призматическая балка имеет прямоугольное сечение с постоянной высотой h и толщиной равной Δ . Будем предполагать, что у призматической балки постоянной толщины при чистом изгибе существует нейтральный слой, т. е. слой, длина которого не изменяется при изгибе. Рассматривается балка длиной ℓ . Воспользуемся способом, известным из уравнений математической физики (например, крутильных колебаний стержня). Будем использовать приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки [2] с учетом выбора осей координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M_x}{E J_x}, \quad (1)$$

где M_x — изгибающий момент, приложенный к балке, E — модуль упругости материала, J_x — момент инерции прямоугольного сечения балки.

Исходя из (1), учитывая произвольность выбора отрезка балки (x_1, x_2) , для которого выводится уравнение колебаний, получаем, что при $x_2 \rightarrow x_1$ уравнение приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где $a = \sqrt{E J_x / (\rho S_x)}$, ρ — плотность материала. Отметим, что для постоянного прямоугольного сечения балки $J_x / S_x = h^2 / 12$, где h — высота прямоугольного сечения балки.

Исходя из (2), собственные частоты свободных изгибных колебаний балок прямоугольного сечения определяются выражением:

$$\omega_i = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2} \sqrt{\frac{E J_x}{\rho S_x}}.$$

где μ_i — корни функции Вебера, являющейся решением уравнения (2) [5].

Литература

1. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. М.: Высшая школа, 1980.
2. Тимошенко С. П. *Теория упругости*. М.-Л.: Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937.
3. Стрелков С. П. *Введение в теорию колебаний*. М.: Высшая школа, 1964.
4. Жемочкин Б. Н. *Теория упругости*. М.: Госстройиздат, 1957.
5. Weisstein E. W. *Parabolic Cylinder Function*. MathWorld [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/>