

Утверждение 1. Если для заданных функций не выполняются однородные условия согласования, то какими бы гладкими эти функции не были, задача (1) – (5) не имеет классического решения, определенного на $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$.

Пусть $\tilde{Q}$ – подобласть Q , являющаяся объединением некоторых подобластей между характеристиками уравнения (1), тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^3[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$ и $\sum_{p=1}^3 [(\delta^{(p)})^2 + (\sigma^{(p)})^2] \neq 0$. Тогда решение задачи (1) – (3) из класса $C^2(\tilde{Q})$ существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Теорема 2. Пусть функции $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$ и $\delta^{(1)} = \sigma^{(1)}$. Тогда решение задачи (1) – (3) из класса $C(\bar{Q}) \cap C^2(\tilde{Q})$ существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Теорема 3. Пусть функции $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$ и $\delta^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0$. Тогда решение задачи (1) – (3) из класса $C^1(\bar{Q}) \cap C^2(\tilde{Q})$ существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Теорема 4. Пусть функции $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^3[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$ и $\sum_{p=1}^3 [(\delta^{(p)})^2 + (\sigma^{(p)})^2] = 0$. Тогда решение задачи (1) – (3) из класса $C^2(\bar{Q})$ существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (4), (5).

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 5. С. 37–42.
2. Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1373–1385.
3. Корзюк В. И., Козловская И. С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.
4. Корзюк В. И., Козловская И. С. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

ОРТОТРОПНОЕ УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ВДОЛЬ ЕЕ СТОРОН

А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк

Минск, Беларусь

При выводе классического уравнения колебания прямоугольной мембраны допущен ряд ошибок, которые кочуют из монографии в монографию и уже превратились в классические передаваемые из поколения в поколения заблуждения [1, 2]. Во-первых, на мембрану действуют не постоянные растягивающие силы, а постоянные напряжения. Во-вторых, в рамках предположения об упругой деформации мембраны нет никакой необходимости предполагать, что напряжения растяжения мембраны, действующие на площадках перпендикулярным координатным осям, одинаковы по величине [1, 2].

Уравнение колебания мембраны обобщено на случай разных коэффициентов при разных частных производных, т. е. получено ортотропное волновое уравнение.

Придерживаясь плана вывода дифференциального уравнения [1], с исправлением допущенных там ошибок. Говоря о мембране, мы подразумеваем упругую свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в состоянии покоя мембрана занимает некоторую прямоугольную область $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ в плоскости xOy , а затем, будучи выведенной из этого состояния, начинает колебаться так, что все ее точки движутся вдоль оси Oz . Перемещение каждой точки мембраны в момент времени t обозначается $u(x, y, t)$ [1].

При выводе уравнения рассматривался внутренний квадратный элемент мембраны, соответствующий интервалам (x_1, x_2) и (y_1, y_2) на осях Ox и Oy соответственно, причем $y_2 - y_1 = x_2 - x_1$. Будем считать, что мембрана имеет постоянную толщину h . Тогда, величины интегральных сил, действующих в плоскости xOy в направлении осей Ox и Oy , приложенных к каждой из сторон рассматриваемого элемента, определяются выражением $T_x = (x_2 - x_1)h\sigma_x$ и $T_y = (y_2 - y_1)h\sigma_y$.

Предполагая, что ρ — это плотность материала мембраны. Тогда можно получить обобщенное уравнение колебания прямоугольной мембраны под действием постоянных разных по величине растягивающих напряжений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где $a_x^2 = \sigma_x / \rho$, $a_y^2 = \sigma_y / \rho$.

Собственные частоты колебаний ω_i прямоугольной пластинки определяются выражением:

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{a \cdot b} \sqrt{b^2 \cdot a_x^2 + a^2 \cdot a_y^2},$$

которое не имеет ничего общего с формулами для вычисления собственных частот прямоугольной мембраны, указанными в известных монографиях [1, 2].

Литература

1. Араманович И. Г., Левин В. И. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1969.
2. Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. *Методы математической физики. Уравнения математической физики*. Томск: Изд-во НТЛ, 2002.

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк, Е.В. Томило

Минск, Беларусь

При изучении колебательных процессов особенно отчетливо проявляется взаимодействие между физикой и математикой — влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на физические знания.

В данной работе впервые получено дифференциальное уравнение поперечных изгибных колебаний призматической балки конечной длины из однородного линейно упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов, решением которого является функция Вебера.

Вывод уравнения изгибных колебаний балки, изложенный в известной монографии В. Л. Бидермана [1], не верен, так как дифференциальное уравнение изгибных колебаний получено из уравнения изогнутой оси балки, выведенного С. П. Тимошенко [2] в случае статического изгиба распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, приложенной на всей длине балки. Отметим также, что получение уравнения у С. П. Тимошенко не достаточно