ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д.А. Жураев

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
davron-1222@mail.ru

В работе рассмотрена интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемый оператором Гелмгольца в неограниченной области с растущими решениями систем.

Пусть, G односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Введем обозначения: $x^\top = (x_1, x_2)^\top$ — транспонированный вектор x, $r = |x - y|$, $\alpha = |x_1 - y_1|$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2$, $u \geqslant 0$, $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)^\top$, $U(x) = (U_1(x), \ldots, U_n(x))^\top$, $u^0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $n = 2^m$, $m = 2$, $E(z)$ — диагональная матрица, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $D(x^\top)$ — $(n \times n)$-матрица с элементами, состоящими из множества линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости, для которых выполняется условие $D^*(x^\top)D(x^\top) = E((|x|^2 + \lambda^2)u^0)$, где $D^*(x^\top)$ — эрмитово сопряженная матрица $D(x^\top)$, λ — вещественное число.

Обозначим через G односвязную область $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D(\partial/\partial x)U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D(\partial/\partial x)$ — матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $H(G)$ — класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

Если $U(y) \in H(G)$, то верна следующая интегральная формула типа Коши [1, 3]:

$$U(x) = \int\limits_{\partial G} M(y, x)U(y)\, ds_y, \quad x \in G, \tag{2}$$

где $M(y, x) = (E(H_0(\lambda r)u^0)D^*(\partial/\partial y))D(t^\top)$. Здесь $t = (t_1, t_2)$ — единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y, поверхности ∂G, $H_0(\lambda r)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, определяемое через функцию Ханкеля первого рода [2].

Функцию $\Phi_\sigma(y, x)$ при $y \neq x$ определим следующим равенством:

$$\Phi_\sigma(y, x) = -\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_2} \frac{u\, I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\, du, \quad \sigma \geqslant \lambda + \sigma_0, \quad \sigma_0 > 0.$$

Здесь $I_0(\lambda u) = J_0(i\lambda u)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. [2].

Формула (2) верна, если вместе $H_0(\lambda r)$ подставим функцию $\Phi_\sigma(y, x) = -(2\pi)^{-1}H_0(\lambda r) + g_\sigma(y, x)$, где $g_\sigma(y, x)$ — регулярное решение уравнения Гельмгольца по переменной y, включая и точку $y = x$.

Тогда интегральная формула имеет вид:

$$U(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,x)U(y)\,ds_y, \quad x \in G, \tag{3}$$

где $N_\sigma(y,x) = (E(\Phi_\sigma(y,x)u^0)D^*(\partial/\partial y))D(t^\top)$.

Обозначим через G_R часть G, лежащую внутри круга радиуса R с центром в нуле:

$$G_R = \{y : y \in G,\ |y| < R\}, \quad G_R^\infty = G \backslash G_R, \quad R > 0.$$

Известно, что если G ограничена и $U(y) \in H(G)$, то справедлива интегральная формула (3). Эту формулу обобщим для случая, когда G — неограниченная область.

Теорема. *Пусть $U(y) \in H(G)$, G — конечносвязная неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, с кусочно-гладкой границей ∂G.*

Если при каждом фиксированном $x \in G$ имеет место равенство

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{G_R^\infty} N_\sigma(y,\,x)U(y)\,ds_y = 0,$$

то верна формула (3), т. е.

$$U_\sigma(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,\,x)U(y)\,ds_y, \quad x \in G_R.$$

Литература

1. Тарханов Н. Н. *Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторых его приложениях* // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Ин-т физики АН СССР, Красноярск, 1980. С. 147–160.

2. Алексидзе М. А. *Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.* М.: Наука, 1991. С. 164.

3. Жураев Д. А. *Задача Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемым оператором Гельмгольца в ограниченной области* // Тр. науч. междунар. конф. «Проблемы современной математики». 22–23 апреля 2011 г. Карши, 2011. С. 123–126.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ

В.И. Корзюк[1], **И.С. Козловская**[2], **С.Н. Наумовец**[3],

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
kozlovskaja@bsu.by
[3] Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь
e-cveta@tut.by

В данной работе рассматривается первая смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши второго порядка. Для рассмотренной задачи доказываются необходимые и достаточные однородные условия согласования, гарантирующие получение классического решения в полуполосе. В аналитическом виде найдено классическое решение одномерного волнового уравнения при наличии условий Дирихле на боковых границах