УДК 517.958:537.8

В.Т. ЕРОФЕЕНКО

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ЭКРАНАХ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Nonlocal boundary conditions linking low-frequency electrical and magnetic fields on two sides of biisotropic layer with arbitrary complex dielectric and magnetic permeabilities and with two complex parameters of chiral media are obtained.

В последнее время в научной литературе значительное внимание уделяется исследованиям композитных материалов [1]. Для постановок краевых задач экранирования электромагнитных полей возникает потребность в моделировании адекватных граничных условий на тонких экранах. Граничные условия для низкочастотных электрических и магнитных полей в случае обычных сред приведены в [2]. В данной статье модели граничных условий для низких частот обобщаются на экраны из биизотропных материалов.

Рассмотрим евклидово пространство R^3 с фиксированной системой координат $0xyz$. В пространстве с электрической и магнитной постоянными ε_0 и μ_0 размещен плоский слой $D\left(0 < z < \Delta\right)$, заполненный композитным материалом с физическими комплекснозначными параметрами ε, μ, G, Z. Из полупространства $D_1\left(z < 0\right)$ на слой D воздействует первичное поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. Обозначим поля: $\mathbf{E}_1', \mathbf{H}_1'$ – отраженное поле в D_1; $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – поле в слое D; $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ – поле в $D_2\left(z > \Delta\right)$; $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1'$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1'$ – суммарное поле в D_1.

Указанные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_j = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_j, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_j \text{ в } D_j; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\left(\mu \mathbf{H} + Z\mathbf{E}\right), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\left(\varepsilon \mathbf{E} + G\mathbf{H}\right) \text{ в } D, \tag{2}$$

где ω – круговая частота поля.

Для случая плоского первичного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, характеризуемого постоянными $\alpha_1 = k_0 \cos\varphi_0 \sin\theta_0$, $\alpha_2 = k_0 \sin\varphi_0 \sin\theta_0$, имеют место граничные условия, связывающие поля на плоскостях $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$ [3, (11)]:

$$\mathbf{E}_{2\tau}(M_2) = \hat{P}_{11}\mathbf{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{P}_{12}\mathbf{H}_{1\tau}(M_1), \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_{2\tau}(M_2) = \hat{P}_{21}\mathbf{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{P}_{22}\mathbf{H}_{1\tau}(M_1), \tag{4}$$

где $M_1 = (x, y, 0) \in \Gamma_1$, $M_2 = (x, y, \Delta) \in \Gamma_2$, $\mathbf{E}_\tau = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$; матрицы $\hat{P}_{js}$ в базисе $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ выражаются через параметры $\varepsilon, \mu, G, Z, \Delta$ слоя D:

$$\hat{P}_{11} = p\begin{pmatrix} p_1\tilde{C}_2 - p_2\tilde{C}_1; & p_1\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2 - p_2\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1 \\ p_2\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1 - p_1\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2; & p_1\tilde{C}_2 - p_2\tilde{C}_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_{12} = p\begin{pmatrix} \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2; & \tilde{\theta}_1\tilde{S}_1 - \tilde{\theta}_2\tilde{S}_2 \\ \tilde{\theta}_2\tilde{S}_2 - \tilde{\theta}_1\tilde{S}_1; & \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{21} = -p_1 p_2 \hat{P}_{12},$$

$$\hat{P}_{22} = p\begin{pmatrix} p_1\tilde{C}_1 - p_2\tilde{C}_2; & p_1\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1 - p_2\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2 \\ p_2\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2 - p_1\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1; & p_1\tilde{C}_1 - p_2\tilde{C}_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\theta}_j = \frac{g_j k_j}{ig}, \quad \tilde{S}_j = \operatorname{sh}(-ik_j\Delta), \quad \tilde{C}_j = \operatorname{ch}(-ik_j\Delta),$$

$$p_j = \frac{1}{\mu}\left(\frac{ig}{\omega g_i} - Z\right), \quad p = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad k_j = \sqrt{g + \frac{1}{2}a^2 + af_j},$$

$$0 \le \arg k_j < \pi, \quad f_j = (-1)^j f_0, \quad f_0 = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - b^2}, \quad 0 \le \arg f_0 < \pi, \quad b = \frac{1}{2}\omega(G + Z),$$

$$g = \omega^2(\varepsilon\mu - ZG), \quad g_j = f_j - \frac{1}{2}a, \quad a = i\omega(G - Z), \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Граничные условия (3), (4) являются асимптотическим приближением точных граничных условий [3] при предположении, что $\left|\frac{k_0^2}{k_j^2}\right| \approx 0$. Физически это означает, что коэффициенты преломления материального слоя D значительно больше коэффициента преломления внешней среды. В результате следует, что граничные условия (3), (4) не зависят от структуры первичного поля.

В случае низких частот $(0 < \omega < 10^4)$ величина $\omega\mu_0 << 1$. Пренебрегая правой частью в первом уравнении (1), получим $\operatorname{rot}\mathbf{E}_j = 0$. Следует, что для низких частот может быть использовано потенциальное приближение поля

$$\mathbf{E}_j \approx -\operatorname{grad} u_j, \tag{5}$$

где u_j – его электрический потенциал.

Аналогично для магнитного поля

$$\mathbf{H}_j \approx -\operatorname{grad} v_j, \tag{6}$$

где v_j – его магнитный потенциал.

Построим следующие математические модели граничных условий для потенциалов на экране D.

Модель 1. В случае низких частот выполнены нелокальные граничные условия сопряжения, связывающие потенциалы электрического поля по обе стороны композитного слоя D, распространение поля в котором описывается уравнениями (2):

$$\varepsilon_0 \frac{\partial u_1(M_1)}{\partial \mathbf{n}} = \left(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{11}^{\mathrm{E}} \operatorname{grad}_\tau u_1(M_1) + \hat{B}_{12}^{\mathrm{E}} \operatorname{grad}_\tau u_2(M_2)\right)\right), \tag{7}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial u_2(M_2)}{\partial \mathbf{n}} = \left(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{21}^{\mathrm{E}} \operatorname{grad}_\tau u_1(M_1) + \hat{B}_{22}^{\mathrm{E}} \operatorname{grad}_\tau u_2(M_2)\right)\right), \tag{8}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{e}_z$, $\hat{B}_{11}^{\mathrm{E}}=\frac{1}{i\omega}\hat{P}_{12}^{-1}\hat{P}_{11}$, $\hat{B}_{12}^{\mathrm{E}}=\frac{i}{\omega}\hat{P}_{12}^{-1}$, $\hat{B}_{21}^{\mathrm{E}}=\frac{i}{\omega}\left(\hat{P}_{21}-\hat{P}_{22}\hat{P}_{12}^{-1}\hat{P}_{11}\right)$, $\hat{B}_{22}^{\mathrm{E}}=\frac{i}{\omega}\hat{P}_{22}\hat{P}_{12}^{-1}$.

Обоснование. Рассмотрим предельные значения уравнений (1) на плоскостях Γ_j. Умножая (1) скалярно на единичную нормаль $\mathbf{n}=\mathbf{e}_z$ к слою D, получим

$$\left(\mathbf{n},\operatorname{rot}\mathbf{E}_{j\tau}\left(M_j\right)\right)=i\omega\mu_0\left(\mathbf{H}_j\left(M_j\right),\ \mathbf{n}\right),\tag{9}$$

$$\left(\mathbf{n},\operatorname{rot}\mathbf{H}_{j\tau}\left(M_j\right)\right)=-i\omega\varepsilon_0\left(\mathbf{E}_j\left(M_j\right),\ \mathbf{n}\right).\tag{10}$$

Из уравнения (3) определим

$$\mathbf{H}_{1\tau}\left(M_1\right)=\hat{P}_{12}^{-1}\,\mathbf{E}_{2\tau}\left(M_2\right)-\hat{P}_{12}^{-1}\hat{P}_{11}\,\mathbf{E}_{1\tau}\left(M_1\right).\tag{11}$$

Подставим выражение (11) в (10) при $j=1$, тогда

$$\varepsilon_0\left(\mathbf{E}_1\left(M_1\right),\mathbf{n}\right)=\left(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{11}^{\mathrm{E}}\ \mathbf{E}_{1\tau}\left(M_1\right)+\hat{B}_{12}^{\mathrm{E}}\ \mathbf{E}_{2\tau}\left(M_2\right)\right)\right).\tag{12}$$

Далее выражение (11) подставим в соотношение (4), тогда

$$\mathbf{H}_{2\tau}\left(M_2\right)=\left(\hat{P}_{21}-\hat{P}_{22}\hat{P}_{12}^{-1}\hat{P}_{11}\right)\mathbf{E}_{1\tau}\left(M_1\right)+\hat{P}_{22}\hat{P}_{12}^{-1}\ \mathbf{E}_{2\tau}\left(M_2\right).\tag{13}$$

Рассмотрим (10) при $j=2$ и исключим $H_{2\tau}$ с помощью формулы (13). В результате

$$\varepsilon_0\left(\mathbf{E}_2\left(M_2\right),\mathbf{n}\right)=\left(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{21}^{\mathrm{E}}\ \mathbf{E}_{1\tau}\left(M_1\right)+\hat{B}_{22}^{\mathrm{E}}\ \mathbf{E}_{2\tau}\left(M_2\right)\right)\right).\tag{14}$$

В потенциальном приближении воспользуемся представлением (5). Тогда соотношения (12), (14) преобразуются в граничные условия (7), (8) для потенциалов u_j. При этом потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u_j=0$ в D_j.

Модель 2. В случае низких частот выполнены нелокальные граничные условия сопряжения, связывающие потенциалы магнитного поля по обе стороны композитного слоя D, распространение поля в котором описывается уравнениями (2):

$$\mu_0\frac{\partial v_1\left(M_1\right)}{\partial\mathbf{n}}=\left(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{11}^{\mathrm{M}}\operatorname{grad}_\tau v_1\left(M_1\right)+\hat{B}_{12}^{\mathrm{M}}\operatorname{grad}_\tau v_2\left(M_2\right)\right)\right),\tag{15}$$

$$\mu_0\frac{\partial v_2\left(M_2\right)}{\partial\mathbf{n}}=\left(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}\left(\hat{B}_{21}^{\mathrm{M}}\operatorname{grad}_\tau v_1\left(M_1\right)+\hat{B}_{22}^{\mathrm{M}}\operatorname{grad}_\tau v_2\left(M_2\right)\right)\right),\tag{16}$$

где

$$\hat{B}_{11}^{\mathrm{M}}=\frac{i}{\omega}\hat{P}_{21}^{-1}\hat{P}_{22},\ \hat{B}_{12}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{i\omega}\hat{P}_{21}^{-1},\ \hat{B}_{21}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{i\omega}\left(\hat{P}_{12}-\hat{P}_{11}\hat{P}_{21}^{-1}\hat{P}_{22}\right),\ \hat{B}_{22}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{i\omega}\hat{P}_{11}\hat{P}_{21}^{-1}.$$

Условия (15), (16) доказываются с помощью соотношений (4), (9), (6).

Заметим, что если среда в областях D_j характеризуется диэлектрическими и магнитными проницаемостями ε_j и μ_j, тогда в граничном условии (7) ε_0 заменяется на ε_1, а в (8) ε_0 – на ε_2. В граничном условии (15) μ_0 заменяется на μ_1, а в (16) μ_0 – на μ_2.

Граничные условия (7), (8), (15), (16) могут использоваться в локально плоском приближении для тонких оболочек произвольной формы и для источников с осевой симметрией [4].

1. Виноградов А. П. Электродинамика композитных материалов. М., 2001.
2. Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1998.
3. Ерофеенко В. Т., Тавакколи Д. П. // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.- мат. наук. 2008. № 1. С. 49.
4. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С., Шушкевич Г. Ч. // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010: Материалы II Междунар. науч.-практ. конф., Гродно, 26–28 апр. 2010 г. Деп. в БелИСА 24.05.10, № Д 201019.

Поступила в редакцию 30.12.10.

Виктор Тихонович Ерофеенко – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИИППМИ БГУ.