УДК 519.213.2:519.216

А.В. КУЗЬМИНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОГО ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА И ОЦЕНИВАНИЕ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

A normal inverse Gaussian distribution, introduced by Barndorff-Nielsen in 1997, is a subclass of a generalized hyperbolic distribution. A normal inverse Gaussian process was introduced by Barndorff-Nielsen in 1998 as a model for log returns of stock prices. This process allows almost perfect fit to financial data. A new algorithm of a normal inverse Gaussian process simulation is presented in this paper. Parameters estimates for log returns of RTS market data fitted by a normal inverse Gaussian process are obtained.

Введем определения случайных величин, используемых при моделировании нормального обратного гауссовского процесса.

Определение 1. Случайная величина ξ имеет обратное гауссовское распределение с параметрами $a, b,$ если ее плотность распределения имеет вид

$$f_\xi(x,a,b) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp(ab) x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(a^2 x^{-1} + b^2 x\right)\right), \tag{1}$$

$a > 0, b > 0, x > 0.$

В этом случае будем обозначать $\xi \sim IG(a,b)$. Обратное гауссовское распределение обладает характеристиками, представленными в табл. 1 [1].

Таблица 1

Моменты обратного гауссовского распределения

Математическое ожидание	a/b
Дисперсия	a/b^3
Асимметрия	$3(ab)^{-1/2}$
Эксцесс	$3\left(1+5(ab)^{-1}\right)$

Определение 2. Случайная величина η имеет нормальное обратное гауссовское распределение с параметрами $\alpha, \beta, \delta, \mu,$ если ее плотность распределения имеет вид

$$f_\eta(x,\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2} + \beta(x-\mu)) \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}, \tag{2}$$

где $K_1(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} z(u+u^{-1})\right) du, z > 0,$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с индексом 1, $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R},$ $x > 0$. Параметры $\alpha, \beta, \delta, \mu$ являются параметрами формы, асимметрии, масштаба и расположения соответственно.

В этом случае будем обозначать $\eta \sim NIG(\alpha,\beta,\delta,\mu)$.

Нормальное обратное гауссовское распределение обладает характеристиками, представленными в табл. 2 [1].

Таблица 2

Моменты нормального обратного гауссовского распределения с параметрами α, β, δ, μ

Математическое ожидание	$\mu + \delta\beta / \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$
Дисперсия	$\alpha^2\delta(\alpha^2-\beta^2)^{-3/2}$
Асимметрия	$3\beta\alpha^{-1}\delta^{-1/2}(\alpha^2-\beta^2)^{-1/4}$
Эксцесс	$3\left(1+\frac{\alpha^2+4\beta^2}{\delta\alpha^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)$

Для функции плотности нормального обратного гауссовского распределения справедливо представление [1]

$$f_\eta(x,\alpha,\beta,\delta,\mu) = \int\limits_0^\infty f_N(x;\beta y+\mu, y) f_{IG}(y,\delta,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}) dy, \tag{3}$$

где $f_N(x;\beta y+\mu, y)$ – плотность нормального распределения с математическим ожиданием $\mu+\beta y$, дисперсией y, $f_{IG}(y,\delta,\sqrt{\alpha^2-\beta^2})$ – плотность обратного гауссовского распределения (1) с параметрами $a=\delta,\ b=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.

Определение 3. Случайный процесс $N=\left(N_t\right)_{t\geq 0}$ с параметрами $\alpha,\beta,\delta,\mu,$ заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},P)$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется нормальным обратным гауссовским процессом, если выполнены следующие условия:

1) $N_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$;

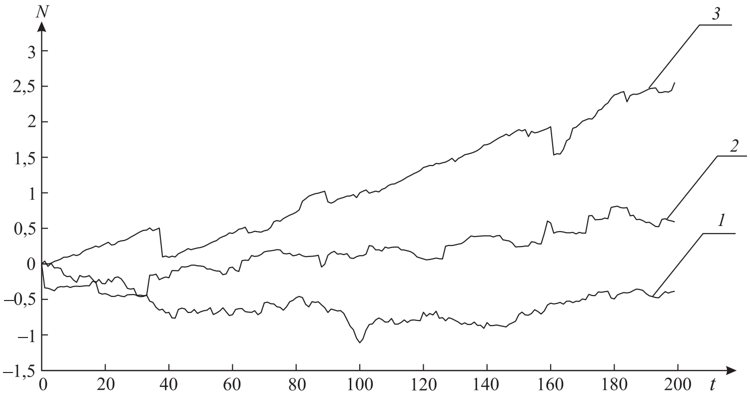
2) N имеет независимые приращения: для любого $n\geq 1$ и любого набора точек $t_i\in[0,+\infty),\ i=\overline{0,n}$, таких, что $0\leq t_0<t_1<...<t_n$, величины $N_{t_0}, N_{t_1}-N_{t_0},...,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ являются независимыми;

3) для любых $s\geq 0, t\geq 0$ N имеет стационарные приращения с нормальным обратным гауссовским распределением с параметрами $\alpha>0, -\alpha<\beta<\alpha, \delta t>0,\ \mu t\in\mathbb{R}$,

$$N_{t+s}-N_s \overset{d}{=} N_t-N_0 \sim NIG(\alpha,\beta,\delta t,\mu t),$$

где $\overset{d}{=}$ обозначает равенство по распределению.

Моделирование нормального обратного гауссовского процесса. Алгоритмы моделирования нормального обратного гауссовского процесса описаны в [1, 2]. В [1] для моделирования нормального обратного гауссовского процесса предлагается использовать обратный гауссовский и стандартный винеровский процессы. В [2] алгоритм моделирования нормального обратного гауссовского процесса базируется на моделировании обратных гауссовских и стандартных нормальных случайных величин. В данной работе предлагается алгоритм моделирования нормального обратного гауссовского процесса с использованием случайных величин с нормальным обратным гауссовским распределением. В силу соотношения (3) случайная величина $\eta\sim NIG(\alpha,\beta,\delta,\mu)$ с нормальным обратным гауссовским распределением представляет собой случайную величину с нормальным распределением с параметрами $E\eta=\beta\xi+\mu$, $Dn=\xi$, т. е. $\eta\sim N(\beta\xi+\mu,\xi)$, где $\xi\sim IG(\delta,\sqrt{\alpha^2-\beta^2})$ – случайная величина с обратным гауссовским распределением с параметрами $a=\delta, b=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, $a>0,\ b>0$.



Траектории нормального обратного гауссовского процесса
с параметрами α, β, δ, μ: *1* – α = 20, β = –3, δ = 5, μ = 0;
2 – α = 0,5, β = 0,3, δ = 1, μ = 2; *3* – α = 0,5, β = 0,3, δ = 1, μ = 0,01

Предлагаемый алгоритм моделирования нормального обратного гауссовского процесса $N=\left(N_t\right)_{t\geq 0}$ состоит из меньшей последовательности шагов по сравнению с алгоритмами из [1, 2].

Алгоритм. 1. Генерируем независимые случайные числа с обратным гауссовским распределением $\left\{\xi_k, k\geq 1\right\}$ с параметрами $a=\delta\Delta t,\ b=\sqrt{\alpha^2-\beta^2},\ a>0,\ b>0$ [1, 2]:

$$\xi_k\sim IG(\delta\Delta t,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}),\ \ k\geq 1.$$

Временной шаг $\Delta t>0$.

2. Генерируем независимые случайные числа с нормальным обратным гауссовским распределением $\left\{\eta_k, k\geq 1\right\}$ как случайные числа с нормальным распределением с параметрами $E\eta_k=\beta\xi_k+\mu\Delta t,\ Dn_k=\xi_k$:

$$\eta_k\sim N(\beta\xi_k+\mu\Delta t,\xi_k),\ \ k\geq 1.$$

3. Генерируем нормальный обратный гауссовский процесс $N=\left(N_t\right)_{t\geq 0}$ с параметрами α,β,δ,μ следующим образом:

$$N_0=0,\ \ N_{k\Delta t}=N_{(k-1)\Delta t}+\eta_k,\ \ k\geq 1.$$

Траектории нормального обратного гауссовского процесса представлены на рисунке.

Оценки параметров нормального обратного гауссовского процесса. В финансовой математике эволюция логарифмической доходности финансовых активов описывается нормальным обратным гауссовским процессом [3–5]. Оценим параметры $\alpha, \beta, \delta, \mu$ нормального обратного гауссовского процесса, описывающего эволюцию логарифмической доходности по индексу RTS и индексу RTS Standard фондовой биржи РТС (Российская торговая система).

Пусть $Y^* = \left(Y^*_t\right)_{t=1,\dots,T}$ – наблюдаемые через равные промежутки времени Δ логарифмические стоимости индекса в моменты времени t, описываемые нормальным обратным гауссовским процессом. Тогда доходы представимы в виде

$$Y_n = Y^*_{\Delta n} - Y^*_{\Delta(n-1)}.$$

Полагая $\Delta = 1$, получаем, что $\{Y_n\}_{n=1,\dots,T}$ имеет такое же распределение, как и Y^*_1, которое задает распределение Y^* [6].

Полагая, что $Y^* = \left(Y^*_t\right)_{t\geq 0}$ является нормальным обратным гауссовским процессом, получаем, что $\{Y_n\}_{n=1,\dots,T}$ независимы и одинаково распределены с плотностью (2). Оценим параметры $\alpha, \beta, \delta, \mu$, используя метод максимального правдоподобия. Функция максимального правдоподобия имеет вид

$$L\left(Y;\theta\right) = \ln f(Y_1,\dots,Y_T;\theta) = \sum_{i=1}^{T} \ln f(Y_i;\theta), \tag{4}$$

где $f(.)$ – плотность нормального обратного гауссовского распределения (2), $\theta = \left(\alpha,\beta,\delta,\mu\right)'$ обозначает вектор неизвестных параметров.

Оценки параметров α,β,δ,μ получаем, находя максимум функции правдоподобия (4) по θ,

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(Y;\theta).$$

Поиск максимума функции правдоподобия (4) осуществляется методом квази-Ньютона [7], который реализован в матричной среде программирования **Ox** (функция MaxBFGS). Чтобы получить начальные значения вектора неизвестных параметров для метода квази-Ньютона, воспользуемся параметризацией нормального обратного гауссовского распределения из [8]. Сформулируем следующую теорему.

Теорема. *Для плотности нормального обратного гауссовского распределения имеет место следующее представление:*

$$f_\eta(x;\tau,\xi,\delta,\mu) = \frac{\xi\sqrt{1+\tau^2}}{\pi} e^{\xi+\frac{\xi\tau}{\delta}(x-\mu)} \frac{K_1\left(\xi\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}, \tag{5}$$

$\tau > 0, \xi > 0, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R}, \;\; x > 0.$

Доказательство. Введем параметры ξ и τ такие, что

$$\tau = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}, \;\; \xi = \delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2},$$

тогда параметры формы α и асимметрии β нормального обратного гауссовского распределения принимают вид

$$\beta = \frac{\xi\tau}{\delta}, \;\; \alpha = \frac{\xi\sqrt{1+\tau^2}}{\delta}. \tag{6}$$

Подставляя параметры α и β из (6) в плотность нормального обратного гауссовского распределения (2), получаем (5). Теорема доказана.

Характеристики нормального обратного гауссовского распределения в случае параметризации (5) представлены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Моменты нормального обратного гауссовского распределения с параметрами τ, ξ, δ, μ

Математическое ожидание	$\mu + \delta\tau$
Дисперсия	$\dfrac{\delta^2(1+\tau^2)}{\xi}$
Асимметрия	$\dfrac{3}{\tau\sqrt{\xi(1+\tau^2)}}$
Эксцесс	$\dfrac{3}{\xi}\left(1+4\dfrac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)$

Начальные значения вектора неизвестных параметров $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)'$ получаем, применяя метод моментов для нахождения оценок параметров с учетом (6). Следует отметить тот факт, что параметр расположения μ задает величину смещения плотности распределения вероятностей и не влияет на ее вид, поэтому в (5) полагаем $\mu = 0$.

Т а б л и ц а 4

Оценки параметров нормального обратного гауссовского процесса

Индекс	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$
RTS	23,6348	–2,7004	0,0184	0,0029
RTS Standard	21,4872	–2,065	0,0112	0,0016

В табл. 4 показаны оценки параметров нормального обратного гауссовского процесса, вычисленные по ежедневным значениям закрытия индекса RTS в период с января 1995 г. по декабрь 2010 г. и индекса RTS Standard в период с сентября 1995 г. по январь 2010 г. фондовой биржи РТС.

1. S c h o u t e n s W . Levy processes in finance. Bognor Regis, 2003.
2. C o n t R ., T a n k o v P . Financial modeling with jump processes. London, 2003.
3. B a r n d o r f f - N i e l s e n O . E . // Finance Stochast. 1998. № 2. P. 41.
4. E b e r l e i n E ., K e l l e r U . // Bernoulli. 1995. Vol. 1. № 3. P. 281.
5. R y d b e r g T . // Math. Finance. 1999. Vol. 9. № 2. P. 183.
6. Ш и р я е в А . Н . Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. М., 1998. Т. 1.
7. B o n n a n s J . F ., G i l b e r t J . C h ., L e m a r é c h a l C ., S a g a s t i z á b a l C . A . Numerical optimization, theoretical and numerical aspects. Second edition. Berlin, 2006.
8. B i b b y B . M ., S ø r e n s e n M . // Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance. North Holland, 2003. P. 211.

Поступила в редакцию 10.02.11.

Анна Викентьевна Кузьмина – аспирант кафедры компьютерных технологий и систем. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем Н.Н. Труш.