$\{\ _4, 3+2c$

$= \{\tau_1, \tau\ , \tau\ \in$

$-$

$- \quad = \quad - \quad = \qquad , \qquad -$

$- \qquad L \quad -$

$_i \ i =$

УДК 517.925.7

Е.В. ГРИЦУК

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ $_{2n}P_1$

The local properties of solutions of the high analogous of the first Painleve equation in the neighborhood of movable pole are investigated.

Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения, хотя они были открыты в результате классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–6]. Задача определения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков. В работах [7–9] лишь для уравнения четвертого порядка иерархии рассмотрены локальные свойства решений уравнений.

Структура уравнений $_{2n}P_1$, $n \ge 1$. Иерархия уравнений $_{2n}P_1$ может быть записана [7, 8] в виде

$$d_{n+1}(w) + 4z = 0, \qquad ({}_{2n}P_1)$$

где последовательность $d_{n+1}(w)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$\frac{d}{dz} d^{n+1}(w) = (D^3 - 8wD - 4w_z)\, d^n(w),\ d^1(w) = -4w,\ D = \frac{d}{dz},\ n = 1, 2, \ldots . \qquad (1)$$

Для $n = 1$, $n = 2$ соответственно получаем

$$w'' = 6w^2 + z, \qquad ({}_2P_1)$$

$$w^{(4)} = -40w^3 + 20ww'' + 10\left(w'\right)^2 + z. \qquad ({}_4P_1)$$

Теорема 1. У*равнение* $_{2n}P_1$, $n \ge 2$, *имеет структуру*

$$w_{2n} = \gamma_n w_0^{n+1} + P_n(w_0, w_1, \ldots, w_{2n-2}) + z, \qquad (2)$$

где $w_m := \dfrac{d^m w}{dz^m}$, P_n *– полином от* $w_0, w_1, \ldots, w_{2n-2}$ *степени* n, *вида*

$$P_n(w_0, w_1, \ldots, w_{2n-2}) := \sum_{\substack{\langle k\rangle = 2n+2 \\ k_0 \le n-1}} b_{k_0 k_1 \ldots k_{2n-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{2n-2}^{k_{2n-2}}, \qquad (3)$$

$b_{k_0k_1\ldots k_{2n-2}}$ *– константы, через k обозначен мультииндекс* $k = (k_0, k_1,..., k_{2n-2})$ *с нормой* $\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{2n-2}(p+2)k_p$, и

$\gamma_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2^{3n+1}\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)}$.

Доказательство. В силу формулы $({}_{2n}P_1)$ достаточно доказать, что имеет место представление

$$d^{n+1}(w_0) = -4\left(w_{2n} - \gamma_n w_0^{n+1} - P_n\left(w_0, w_1,..., w_{2n-2}\right)\right),\ n = 1, 2,... . \quad (4)$$

Заметим, что рекурсивное соотношение (1) можно представить в виде

$$d^{n+1}(w_0) = (D^2 - 4w_0)d^n(w_0) - 4\int w_0 \frac{\partial d^n(w_0)}{\partial z}dz, \quad (5)$$

причем выражение $w_0\dfrac{\partial d^n(w_0)}{\partial z}$ представляет собой производную некоторого полинома [10]. Применим метод математической индукции. При $n = 2$ убеждаемся, что уравнение $({}_4P_1)$ имеет указанную структуру (2).

Пусть представление (4) верно при $n = s$. Докажем его истинность при $n = s + 1$.

Вычислим

$$d^{s+2}(w_0) = D^2 d^{s+1}(w_0) - 4w_0 d^{s+1}(w_0) - 4\int w_0 \frac{\partial d^{s+1}(w_0)}{\partial z}dz = -4(w_{2s+2} -$$
$$-(s+1)s\,\gamma_s w_0^{s-1}w_1^2 - (s+1)\gamma_s w_0^s w_2 - D^2P_s) + 16(w_0w_{2s} - \gamma_s w_0^{s+2} - w_0P_s) +$$
$$+16\int w_0\left(w_{2s+1} - \gamma_s(s+1)w_0^s w_1 - DP_s\right)dz = -4\left(w_{2s+2} + 4(2s+3)/(s+2)\gamma_s w_0^{s+2}\right) +$$
$$+4P_{s+1}(w_0, w_1,..., w_{2n}) = [\text{так как } \gamma_{s+1} = -4(2s+3)/(s+2)\gamma_s] = -4\left(w_{2s+2} - \gamma_{s+1}w_0^{s+2}\right) +$$
$$+4P_{s+1}(w_0, w_1,..., w_{2n}) = -4\left(w_{2(s+1)} - \gamma_{s+1}w_0^{(s+1)+1} - P_{s+1}(w_0, w_1,..., w_{2n})\right),$$

где $$P_{s+1}(w_0, w_1,..., w_{2n}) =$$
$$= (s+1)s\,\gamma_s w_0^{s-1}w_1^2 + (s+1)\gamma_s w_0^s w_2 + D^2P_s - 4(w_0w_{2s} - w_0P_s) - 4\int w_0\left(w_{2s+1} - DP_s\right)dz =$$
$$= \sum_{\substack{\langle k\rangle = 2s+4\\ k_0\le s}} \tilde b_{k_0k_1\ldots k_{2s}} w_0^{k_0}w_1^{k_1}\ldots w_{2s}^{k_{2s}} = \sum_{\substack{\langle k\rangle = 2(s+1)+2\\ k_0\le (s+1)-1}} \tilde b_{k_0k_1\ldots k_{2(s+1)-2}} w_0^{k_0}w_1^{k_1}\ldots w_{2(s+1)-2}^{k_{2(s+1)-2}}.$$

Слагаемое w_0P_s дает степень $s + 1$ полинома P_{s+1}, а замена $k_0 + 1$ на k_0 приводит к требованию $k_0 \le s$. Для нормы мультииндекса k' мономов полинома DP_s имеет место равенство $\langle k'\rangle = \langle k\rangle + 1$, где $\langle k\rangle$ – норма мультииндекса мономов полинома P_s. Норма мультииндекса мономов подынтегрального полинома равна $\langle k\rangle + 3$. После интегрирования норма мультииндекса мономов уменьшается на единицу и равна $\langle k\rangle + 2 = 2s + 2 + 2 = 2(s + 1) + 2$. Аналогично для нормы мультииндекса k'' мономов полинома D^2P_s имеет место равенство

$$\langle k''\rangle = \langle k'\rangle + 1 = \langle k\rangle + 2 = 2s + 2 + 2 = 2(s + 1) + 2.$$

Для остальных слагаемых полинома P_{s+1} непосредственно убеждаемся, что норма мультииндекса мономов равна $2(s + 1) + 2$. Это значит, что представление (4) верно при $n = s + 1$. По методу математической индукции получаем, что представление (4) верно при любом натуральном n. Теорема 1 доказана.

Порядок подвижного полюса решений уравнений $_{2n}P_1$.

Лемма. *Если решение уравнения* $_{2n}P_1$ *имеет подвижный полюс, то только второго порядка.*

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (2) произведем замену $w \sim c_0(z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (2) являются w_{2n}, слагаемые полинома (3) и, возможно, слагаемое $\gamma_n w_0^{n+1}$. В первом случае имеем $q + 2n = qk_0 + (q+1)k_1 +...+ (q + 2n - 2)k_{2n-2}$ или $q + 2n = (q - 2)(k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2}) + \langle k\rangle$. Так как $\langle k\rangle = 2n + 2$, то имеем $(q - 2)(k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k\rangle = 2n + 2$. Значит, $q = 2$. Во втором случае получаем условие $q + 2n = q(n + 1)$, откуда находим $q = 2$. В [7] получено уравнение на $c_0 \ne 0$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(c_0 - j(j+1)/2\right) = 0. \tag{6}$$

Лемма доказана.

Исследование решений уравнений ${}_{2n}P_1$ в окрестности подвижного полюса. Теорема 1 может использоваться для получения уравнений иерархии ${}_{2n}P_1$, $n \geq 3$, так как она позволяет составить $d^{\,n+1}(w)$ с неопределенными коэффициентами $b_{k_1k_2\ldots k_{2n-2}}$. Для этого находим все мультииндексы k, удовлетворяющие условиям $\langle k \rangle = 2n + 2$, $k_0 \leq n - 1$, и составляем полином $P_n(w_0, w_1,..., w_{2n-2})$. Так как форма $d^{\,n}(w)$ уже известна, то подставляем в (1) $d^{\,n+1}(w)$ и $d^{\,n}(w)$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых мономах и получаем для определения коэффициентов $b_{k_1k_2\ldots k_{2n-2}}$ систему линейных алгебраических уравнений. Согласно работе [10] полученная система имеет единственное решение. Так, например, при $n = 3$ и $n = 4$ вычисляем

$$w^{(6)} = 280w^4 + 42\left(w''\right)^2 + 56w'w^{(3)} + 28ww^{(4)} - 280w\left(\left(w'\right)^2 + ww''\right) + z, \tag{${}_6P_1$}$$

$$\begin{gathered} w^{(8)} = -\,2016w^5 + 36ww^{(6)} + 108w'w^{(5)} + 228w''w^{(4)} - 504w^2w^{(4)} + 138\left(w^{(3)}\right)^2 - \\ -\,2016ww'w^{(3)} - 1512w\left(w''\right)^2 - 1848\left(w'\right)^2 w'' + 3360w^3w'' + 5040w^2\left(w'\right)^2 + z. \end{gathered} \tag{${}_8P_1$}$$

Для определения номеров коэффициентов c_j, которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{\,j-2}, \tag{7}$$

где $t = z - z_0$, $z_0 \in \boldsymbol{C}$, решения уравнения (${}_{2n}P_1$) в окрестности подвижного полюса z_0, в общем случае может быть применим метод резонансов [11].

Рассмотрим случай максимально возможного значения c_0, т. е. выберем пару $(c_0, q) = (n(n + 1)/2, 2)$. Положим в уравнении (${}_{2n}P_1$)

$$w \sim c_0 t^{-2} + \beta t^{\,r-2}. \tag{8}$$

Тогда имеем $d^{\,n+1}(w) \sim -4(S_n(c_0)t^{-2n-2} + \beta R_{2n}(r, c_0)t^{\,r-2n-2})$, где $R_{2n}(r, c_0)$ – резонансный многочлен уравнения (${}_{2n}P_1$) и в силу выбора c_0 $S_n(c_0) = 0$. Резонансный многочлен находим путем подстановки (8) в формулу (5) и выделения на каждой итерации линейной части по β. Получаем, что

$$R_{2n}(r, c_0) = \prod_{j=1}^{n}(r + 2j - 1)(r - 2(n + j + 1)). \tag{9}$$

Рассмотрим случай выбора пары $(c_0, q) = (m(m + 1)/2, 2)$, где $1 \leq m \leq n - 1$. Осуществим в уравнении (${}_{2n}P_1$) переход (8), тогда, полагая

$$d^{\,n}(w) \sim -4(S_{n-1}(c_0)t^{-2n} + \beta R_{2n-2}(r, c_0)t^{\,r-2n}),\ d^{\,n+1}(w) \sim -4(S_n(c_0)t^{-2n-2} + \beta R_{2n}(r, c_0)t^{\,r-2n-2}),$$

подставляем в (1) и получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$S_n(c_0) = -4(2n+1)/(n+1)(c_0 - n(n+1)/2)S_{n-1}(c_0), \tag{10}$$

$$(r - 2n - 2)R_{2n}(r, c_0) = (r - 2n - 1)(r - 2(n + m + 1))(r - 2(n - m))R_{2n-2}(r, c_0). \tag{11}$$

Рекуррентное соотношение (10) представляется в явном виде

$$S_n(c_0) = \frac{(-2)^n(2n+1)!}{n!(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(c_0 - j(j+1)/2).$$

Уравнение $S_n(c_0) = 0$ дает условие (6) на коэффициент c_0. В итерации (11) резонансный многочлен $R_{2m}(r, c_0)$ берем из формулы (9). Непосредственно убеждаемся, что рекуррентному соотношению (11) при $1 \leq m < n$ удовлетворяет резонансный многочлен

$$R_{2n}(r, c_0) = \prod_{j=1}^{m}(r + 2j - 1)(r - 2(n + j + 1))\prod_{s=1}^{n-m}(r - 2s)(r - 2m - 2s - 1). \tag{12}$$

Таким образом, все резонансы, отвечающие различному выбору пары $(c_0, 2)$, являются целыми и однократными. Количество положительных резонансов среди них равно $2n - m$.

Резонансный многочлен $R_{2n}(r, c_0)$ можно получить в другой форме записи из уравнения (2). Введем полином $Q_{n+1}(w_0, w_1,..., w_{2n-2}) := \gamma_n w_0^{n+1} + P_n(w_0, w_1,..., w_{2n-2})$.

Тогда в окрестности подвижной особой точки z_0 уравнение (2) представляется в виде

$$w_{2n} = Q_{n+1}(w_0, w_1,..., w_{2n-2}) + t + z_0. \quad (13)$$

Подставим (8) в уравнение (13) и получим при βt^{r-2n-2} резонансный многочлен

$$R_{2n}(r, c_0) := (r-2)(r-3)\dots(r-2n-1) - A_1 - A_2(r-2) - \\ - A_3(r-2)(r-3) - \dots - A_{2n-1}(r-2)(r-3)\dots(r-2n+1), \quad (14)$$

где $A_j = \dfrac{\partial Q_{n+1}}{\partial w_{j-1}}(c_0, -2!c_0, 3!c_0,..., -(2n-2)!c_0, (2n-1)!c_0)$, $j = 1, 2,..., 2n-1$, а при t^{-2n-2} – многочлен для определения c_0:

$$S_n(c_0) = c_0(2n+1)! - Q_{n+1}(c_0, -2!c_0, 3!c_0,..., -(2n-2)!c_0, (2n-1)!c_0).$$

Преобразуем уравнение (13) к системе Брио и Буке. Осуществим замену $w_j = ((-1)^j(j+1)!c_0 + u_{j+1}(t))t^{-j-2}$, $j = 0, 1,..., 2n-1$, где формальные степенные ряды $u_j(t)$ удовлетворяют условиям

$$tu_j' = (j+1)u_j + u_{j+1}, j = 1, 2,..., 2n-1, \quad (15)$$

и обладают свойством $u_j(t) \to 0$ при $t \to 0$. Уравнение (13) запишется в виде

$$tu_{2n}' = S_n(c_0) + \sum_{j=1}^{2n-1} A_j u_j + (2n+1)u_{2n} + t^{2n+2}(t+z_0) + \sum_{i_1+i_2+...+i_{2n-1}=2}^{n} B_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_{2n-1}^{i_{2n-1}}, \quad (16)$$

где
$$B_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} = \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_{2n-1}!} \frac{\partial Q_{n+1}^{i_1+i_2+\dots+i_{2n-1}}}{\partial w_0^{i_1} \partial w_1^{i_2} \dots \partial w_{2n-2}^{i_{2n-1}}}(c_0, -2!c_0, 3!c_0, ..., -(2n-2)!c_0, (2n-1)!c_0).$$

Так как при фиксированном c_0 из (6) $S_n(c_0) = 0$, то уравнения (15) и (16) образуют систему Брио и Буке

$$tu_j' = (j+1)u_j + u_{j+1}, j = 1, 2,..., 2n-1,$$
$$tu_{2n}' = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j u_j + (2n+1)u_{2n} + t^{2n+2}(t+z_0) + \sum_{i_1+i_2+...+i_{2n-1}=2}^{n} B_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_{2n-1}^{i_{2n-1}}, \quad (17)$$

к которой в окрестности точки z_0 сводится уравнение (13). Непосредственно можно убедиться, что характеристический многочлен линейной части системы (17) совпадает с резонансным многочленом (14), т. е. собственные значения системы (17) совпадают с резонансами. Для определения коэффициентов рядов $u_j(t)$, $j = 2, 3,\dots,2n-1$, через коэффициенты ряда $u_1(t)$ воспользуемся первыми $2n-1$ уравнениями из (17). В последнем уравнении системы (17) линейную составляющую по u_j перенесем в левую часть уравнения, тогда с учетом (14) для коэффициентов ряда $u_1(t)$ получаем условия

$$c_j R_{2n}(j, c_0) = N_j(c_0, c_1,..., c_{j-1}), \; j \ge 1, \quad (18)$$

где N_j – полиномы. Таким образом, при фиксированной паре $(c_0, 2)$ и при выполнении условий разрешимости уравнений (18) определяются коэффициенты формального ряда (7). Для доказательства его сходимости достаточно воспользоваться теоремой А12 из [12, с. 272] о сходимости формальных степенных рядов, удовлетворяющих системе Брио и Буке. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если уравнению* (2) *удовлетворяет ряд вида* (7), *то он сходится в области* $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Исследование решения уравнения $_6P_1$ в окрестности подвижного полюса. В окрестности точки z_0 уравнение ($_6P_1$) принимает вид

$$w^{(6)} = 280w^4 + 42\left(w''\right)^2 + 56w'w^{(3)} + 28ww^{(4)} - 280w\left(\left(w'\right)^2 + ww''\right) + t + z_0. \quad (19)$$

Рассмотрим случай $m = 1$, имеем $c_0 = 1$. По формуле (12) при $n = 3$ получаем $R_6(r, 1) = (r+1)(r-2)(r-4)(r-5)(r-7)(r-10)$. То есть имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и пять положительных резонансов $r_2 = 2$, $r_3 = 4$, $r_4 = 5$, $r_5 = 7$, $r_6 = 10$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (19), имеет вид

$$w = t^{-2} + h_1 + h_2t^2 + h_3t^3 + c_6t^4 + h_4t^5 + c_8t^6 + c_9t^7 + h_5t^8 + \sum_{j=11}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (20)$$

где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – произвольные параметры, $c_1 = c_3 = 0$, $c_6 = 5h_1(h_1^2 + h_2)$,

$$c_8 = -\frac{z_0}{1296} - \frac{7}{54}h_2^2 + \frac{35}{18}h_1^2\left(2h_2 + 3h_1^2\right), \; c_9 = -\frac{1}{2800} + \frac{1}{5}h_2h_3 + \frac{4}{5}h_1h_4 - \frac{3}{5}h_1^2h_3.$$

Коэффициенты c_j, $j > 10$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (20) является сходящимся.

Рассмотрим случай $m = 2$, имеем $c_0 = 3$. По формуле (12) при $n = 3$ получаем $R_6(r, 3) = (r + 1)(r + 3)(r - 2)(r - 7)(r - 10)(r - 12)$. То есть имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$ и четыре положительных $r_3 = 2$, $r_4 = 7$, $r_5 = 10$, $r_6 = 12$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (19), имеет вид

$$w = 3t^{-2} + h_1 + c_4t^2 + c_6t^4 + h_2t^5 + c_8t^6 + c_9t^7 + h_3t^8 + c_{11}t^9 + h_4t^{10} + \sum_{j=13}^{\infty} c_j t^{j-2}, \tag{21}$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 – произвольные параметры, $c_1 = c_3 = c_5 = 0$, $c_4 = -h_1^2$, $c_6 = \dfrac{10}{3}h_1^2$, $c_8 = \dfrac{91}{9}h_1^4 + \dfrac{z_0}{4752}$, $c_9 = \dfrac{1}{5040} + \dfrac{4}{3}h_1h_2$, $c_{11} = \dfrac{h_1}{9072} + \dfrac{5}{9}h_1^2h_2$. Коэффициенты c_j, $j > 12$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (21) является сходящимся.

Рассмотрим оставшийся случай $m = n = 3$, имеем $c_0 = 6$. По формуле (9) получаем $R_6(r, 6) = (r + 1)(r + 3)(r + 5)(r - 10)(r - 12)(r - 14)$. То есть имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$, $r_3 = -5$ и три положительных $r_4 = 10$, $r_5 = 12$, $r_6 = 14$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (19), имеет вид

$$w = 6t^{-2} + c_8t^6 + c_9t^7 + h_1t^8 + h_2t^{10} + h_3t^{12} + \sum_{j=15}^{\infty} c_j t^{j-2}, \tag{22}$$

где h_1, h_2, h_3 – произвольные параметры, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_{11} = c_{13} = 0$, $c_8 = -\dfrac{z_0}{61776}$, $c_9 = -\dfrac{1}{25200}$. Коэффициенты c_j, $j > 14$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (22) является сходящимся. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Уравнению* ${}_6P_1$ *удовлетворяют ряды вида* (20), (21) и (22), *сходящиеся в области* $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Исследование решения уравнения ${}_8P_1$ в окрестности подвижного полюса. В окрестности точки z_0 уравнение (${}_8P_1$) принимает вид

$$w^{(8)} = -2016w^5 + 36ww^{(6)} + 108w'w^{(5)} + 228w''w^{(4)} - 504w^2w^{(4)} + 138\left(w^{(3)}\right)^2 -$$
$$- 2016ww'w^{(3)} - 1512w\left(w''\right)^2 - 1848\left(w'\right)^2 w'' + 3360w^3w'' + 5040w^2\left(w'\right)^2 + t + z_0. \tag{23}$$

Рассмотрим случай $m = 1$, имеем $c_0 = 1$. По формуле (12) при $n = 4$ получаем $R_8(r, 1) = (r + 1)\times$ $\times(r - 2)(r - 4)(r - 5)(r - 6)(r - 7)(r - 9)(r - 12)$. То есть имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и семь положительных $r_2 = 2$, $r_3 = 4$, $r_4 = 5$, $r_5 = 6$, $r_6 = 7$, $r_7 = 9$, $r_8 = 12$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = t^{-2} + h_1 + h_2t^2 + h_3t^3 + h_4t^4 + h_5t^5 + c_8t^6 + h_6t^7 + c_{10}t^8 + c_{11}t^9 + h_7t^{10} + \sum_{j=13}^{\infty} c_j t^{j-2}, \tag{24}$$

где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7 – произвольные параметры, $c_1 = c_3 = 0$,

$$c_8 = -\frac{35}{18}h_1^4 - \frac{35}{9}h_1^2h_2 - \frac{7}{54}h_2^2 + \frac{14}{9}h_1h_4,$$

$$c_{10} = \frac{9}{80}h_3^2 + \frac{7}{10}h_1^2h_4 + \frac{1}{6}h_2h_4 - \frac{7}{3}h_1^3h_2 - \frac{7}{5}h_1^5 - \frac{z_0}{63360},$$

$$c_{11} = \frac{8}{45}h_3h_4 + \frac{1}{9}h_1^3h_3 - \frac{2}{9}h_1^2h_5 + \frac{5}{9}h_1h_6 - \frac{1}{9}h_1h_2h_3 + \frac{5}{27}h_2h_5 - \frac{1}{181440}.$$

Коэффициенты c_j, $j > 12$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (24) является сходящимся.

Рассмотрим случай $m = 2$, имеем $c_0 = 3$. По формуле (12) при $n = 4$ получаем $R_8(r, 3) = (r + 1)(r + 3)(r - 2)(r - 4)(r - 7)(r - 9)(r - 12)(r - 14)$. То есть имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$ и шесть положительных $r_3 = 2$, $r_4 = 4$, $r_5 = 7$, $r_6 = 9$, $r_7 = 12$, $r_8 = 14$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 3t^{-2} + h_1 + h_2t^2 + c_6t^4 + h_3t^5 + c_8t^6 + h_4t^7 + c_{10}t^8 + c_{11}t^9 + h_5t^{10} + c_{13}t^{11} + h_6t^{12} + \sum_{j=15}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (25)$$

где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 – произвольные параметры, $c_1 = c_3 = c_5 = 0$,

$$c_6 = -\frac{5}{3}h_1^3 - 5h_1h_2,\ c_8 = -\frac{35}{6}h_1^4 - \frac{35}{3}h_1^2h_2 + \frac{77}{18}h_2^2,\ c_{10} = -\frac{7}{2}h_1^5 - \frac{10}{3}h_1^3h_2 + \frac{15}{2}h_1h_2^2 + \frac{z_0}{164736},$$

$$c_{11} = \frac{5}{7}h_1h_4 - \frac{10}{21}h_1^2h_3 - \frac{5}{63}h_2h_3 + \frac{1}{254016},$$

$$c_{13} = \frac{5}{28}h_1^2h_4 - \frac{25}{63}h_1^3h_3 + \frac{1}{12}h_2h_4 - \frac{5}{7}h_1h_2h_3 + \frac{h_1}{620928}.$$

Коэффициенты c_j, $j > 14$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (25) является сходящимся.

Рассмотрим случай $m = 3$, имеем $c_0 = 6$. По формуле (12) при $n = 4$ получаем $R_8(r, 6) = (r + 1)(r + 3)(r + 5)(r - 2)(r - 9)(r - 12)(r - 14)(r - 16)$. То есть имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$, $r_3 = -5$ и пять положительных $r_4 = 2$, $r_5 = 9$, $r_6 = 12$, $r_7 = 14$, $r_8 = 16$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 6t^{-2} + h_1 + c_4t^2 + c_6t^4 + c_8t^6 + h_2t^7 + c_{10}t^8 + c_{11}t^9 + h_3t^{10} + c_{13}t^{11} + h_4t^{12} + c_{15}t^{13} + h_5t^{14} + \sum_{j=17}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (26)$$

где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – произвольные параметры, $c_1 = c_3 = c_5 = 0$, $c_4 = -\frac{3}{5}h_1^2$, $c_6 = \frac{2}{3}h_1^3$, $c_8 = -\frac{161}{75}h_1^4$, $c_{10} = -6h_1^5 - \frac{z_0}{823680}$, $c_{11} = \frac{5}{4}h_1h_2 - \frac{1}{725760}$, $c_{13} = \frac{3}{5}h_1^2h_2 - \frac{h_1}{1330560}$, $c_{15} = \frac{7}{36}h_1^3h_2 - \frac{7}{74131200}h_1^2$. Коэффициенты c_j, $j > 16$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (26) является сходящимся.

Рассмотрим случай $m = n = 4$, имеем $c_0 = 10$. По формуле (9) получаем $R_8(r, 10) = (r + 1)(r + 3)(r + 5)(r + 7)(r - 12)(r - 14)(r - 16)(r - 18)$. То есть имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$, $r_3 = -5$, $r_4 = -7$ и четыре положительных $r_5 = 12$, $r_6 = 14$, $r_7 = 16$, $r_8 = 18$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 10t^{-2} + h_1t^{10} + h_2t^{12} + h_3t^{14} + h_4t^{16} + \sum_{j=19}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (27)$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 – произвольные параметры, $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_9 = c_{13} = c_{15} = c_{17} = 0$, $c_{10} = \frac{z_0}{14002560}$, $c_{11} = \frac{1}{5080320}$. Коэффициенты c_j, $j > 18$, однозначно определяются через произвольные параметры h_i и z_0. В силу теоремы 2 ряд (27) является сходящимся. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Уравнению* ${}_8P_1$ *удовлетворяют ряды вида* (24), (25), (26) и (27), *сходящиеся в окрестности* $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

1. Painlevé P. // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201.
2. Gambier B. // Acta Math. 1909. Vol. 33. P. 1.
3. Ince E.L. Ordinary Differential Equations. Dover; New York, 1956. P. 430.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950. С. 151.
5. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990. С. 3.
6. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004. С. 85.
7. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 1.
8. Kudrjashov N.A. // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 224. P. 353.
9. Григорьев А.А., Громак В.И. // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2006. № 4. С. 10.
10. Lax P.D. // SIAM. Review. 1976. Vol. 18. № 3. P. 351.
11. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715.
12. Gromak V.I., Laine I., Shimomura S. Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. Berlin; New York, 2002. Vol. 28. P. 272.

Поступила в редакцию 15.10.10.

Евгений Васильевич Грицук – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений В.И. Громак.