/ / / / / / / / / / /

.

УДК 517.95

А.В. МОТЕВИЧ

ТРЕХМЕРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The energy inequality for strong solutions of the boundary value problem for second-order partial operator-differential equation with three variables and dependent on these variables domains of the unbounded operator coefficients is established.

Двумерная граничная задача для дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения неограниченных операторов изучалась в [1]. В настоящей работе выведено энергетическое неравенство для аналогичной трехмерной задачи. Задачи типа Гурса рассматривались для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка в нецилиндрической области в [2, 3], для гиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка в цилиндрической области в [4] и для уравнений в частных производных высших порядков в цилиндрической области в [5].

Постановка задачи. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $|\cdot|$. В параллелепипеде $T=\prod_{i=1}^{3}]0,T_i[$ значений трех переменных $t=\{t_1,t_2,t_3\}$ рассматривается дифференциально-операторное уравнение

$$L(t)u\equiv\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_2\partial t_1}+\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_3\partial t_2}+\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_3\partial t_1}+\sum_{i=1}^{3}A_i(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_i}+A(t)u(t)=f(t),\quad t\in T, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$l_1u\equiv u\big|_{t_1=0}=\varphi_1(t_2,t_3),\ l_2u\equiv u\big|_{t_2=0}=\varphi_2(t_1,t_3),\ l_3u\equiv u\big|_{t_3=0}=\varphi_3(t_1,t_2), \tag{2}$$

где $\varphi_1(t_2,t_3)$, $\varphi_2(t_1,t_3)$ и $\varphi_3(t_1,t_2)$ – функции переменных $\{t_2,t_3\}\in[0,T_2]\times[0,T_3]$, $\{t_1,t_3\}\in[0,T_1]\times[0,T_3]$ и $\{t_1,t_2\}\in[0,T_1]\times[0,T_2]$ соответственно со значениями в H, удовлетворяющие условию согласования $\varphi_1(0,0)=\varphi_2(0,0)=\varphi_3(0,0)$. Здесь u и f – неизвестная и заданная функции трехмерной переменной t со значениями в H, коэффициенты $A(t)$ и $A_i(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t соответственно областями определения $D(A(t))$ и $D(A_i(t))$, $i=\overline{1,3}$.

Выведем энергетическое неравенство сильных решений граничной задачи (1), (2).

Основные понятия и обозначения. Задаче (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L\equiv\{\mathcal{L}(t),l_1,l_2,l_3\}:E\supset D(L)\to F$, действующий из банахова пространства E, полученного замыканием множества $D(L)=\{u\in\mathcal{H}=L_2(\mathcal{T},H):u\in D(A(t)),\ \partial u/\partial t_i\in D(A_i(t)),$ $t\in\overline{\mathcal{T}}=\prod_{i=1}^{3}[0,T_i];\ \partial u/\partial t_i,\ \partial^2u/\partial t_i\partial t_j=\partial^2u/\partial t_j\partial t_i,\ A(t)u,\ A_i(t)\partial u/\partial t_i\in\mathcal{H},\ j<i,\ i,j=\overline{1,3}\}$ по норме

$$\|u\|_E^2=\sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3}\int_0^{T_i}\int_0^{T_j}\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right]dt_j\,dt_i,$$

в гильбертово пространство $F=\mathcal{H}\times H_1\times H_2\times H_3$ всех функций $\Phi(t)=\{f(t),\ \varphi_1(t_2,t_3),$ $\varphi_2(t_1,t_3),\varphi_3(t_1,t_2)\}$ таких, что $\varphi_1(0,0)=\varphi_2(0,0)=\varphi_3(0,0)$, с нормой $\|\Phi\|_F=\Big(\|f\|_0^2+\|\varphi_1\|_1^2+$ $+\|\varphi_2\|_2^2+\|\varphi_3\|_3^2\Big)^{1/2}$. Здесь $\|\cdot\|_0$ – норма в $\mathcal{H}$, гильбертовы пространства H_i – замыкания следов функций u из множества $D(L)$ при $t_i=0$ по эрмитовым нормам

$$\|u\|_i=\left(\int_0^{T_j}\int_0^{T_k}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_k}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_i=0}dt_k\,dt_j\right)^{1/2},\ k<j,\ k\neq i,\ j\neq i,\ k,j,i=\overline{1,3}.$$

Стандартным образом доказывается следующая

Лемма 1. *Если при каждом $t\in\overline{\mathcal{T}}$ операторы $A(t)$ самосопряжены и положительны в H и множество $D^*(L)=\left\{v\in D(L):v(t)\in D(A_i^*(t)),\ t\in\overline{\mathcal{T}},\ A_i^*(t)v\in\mathcal{H},\ i=\overline{1,3}\right\}$ плотно в $\mathcal{H}$, где $A_i^*(t):H\supset D(A_i^*(t))\to H$ – сопряженные операторы к операторам $A_i(t)$ в $\mathcal{H}$, то оператор L допускает сильное замыкание $\overline{L}\equiv\{\overline{\mathcal{L}(t)},l_1,l_2,l_3\}:E\supset D(\overline{L})\to F$.*

Определение. Решения $u\in D(\overline{L})$ операторного уравнения $\overline{L}u=\Phi$, $\Phi\in F$, называются *сильными решениями* граничной задачи (1), (2).

Замечание 1. Можно показать, что функция $u\in D(L)$ непрерывна $u\in C(\overline{\mathcal{T}},H)$ и ее производные $\partial u/\partial t_i\in C([0,T_i],\ L_2(]0,T_j[\times]0,T_k[,H)),\ j<k,\ j\neq i,k\neq i,\quad j,k,i=\overline{1,3}$. Поэтому этими же свойствами обладают сильные решения задачи (1), (2).

Энергетическое неравенство сильных решений. Для сильных решений трехмерной граничной задачи (1), (2) справедлива следующая априорная оценка.

Теорема 1. *Пусть выполняются требования леммы 1 и следующие условия:*

I. *При всех $t\in\mathcal{T}$ операторы $A_i(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ с областями определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A(t)$ (т. е. $\left|A_i(t)w\right|\le c_i\left|A^{1/2}(t)w\right|\ \forall w\in D(A^{1/2}(t)),\ c_i>0,\ i=\overline{1,3}$) и для них имеет место оценка*

$$-\mathrm{Re}\big(A_1(t)v_1+A_2(t)v_2+A_3(t)v_3,v_1+v_2+v_3\big)\le c_3\left(|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2\right)\ \forall v_1,\ v_2,\ v_3\in D(A^{1/2}(t)),\ c_3\ge 0.\qquad(3)$$

II. *В H при всех $t\in\mathcal{T}$ существуют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)\in\mathcal{B}(\mathcal{T},\mathcal{L}(H))$, сильно непрерывные по t и имеющие ограниченные сильные частные производные $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H)),\ i=\overline{1,3}$, такие, что справедливы оценки*

$$\left|\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}g,g\right)\right|\le c_4(A^{-1}(t)g,g)\ \forall g\in H,\ c_4\ge 0,\ i=\overline{1,3}. \tag{4}$$

Тогда справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_E^2\le c_5\left\|\overline{L}u\right\|_F^2\quad \forall u\in D(\overline{L}),\ c_5=(3/2)\exp\{(T_1+T_2+T_3)\max\{c_4,3+2c_3\}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Умножаем уравнение (1) скалярно в H на $e^{c\theta(t)}\left(\partial u/\partial t_1+\partial u/\partial t_2+\partial u/\partial t_3\right)$, где $\theta(t)=\sum_{i=1}^{3}(\tau_i-t_i)$, $c\ge 0$, интегрируем по частям по $t\in\mathcal{T}_\tau=\prod_{i=1}^{3}[0,\tau_i]$, $0<\tau_i\le T_i$, $i=\overline{1,3}$, и для всех $u\in D(L)$ получаем равенство

$$\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\mathcal{L}(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt=\sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t_i\partial t_j},\frac{\partial u}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(A(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}+A_3(t)\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt+ \tag{6}$$

$$+\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t_2\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt+\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t_3\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt+\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t_3\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt.$$

В слагаемых первой суммы правой части равенства (6), интегрируя по частям один раз по t_i или t_j, приходим для $j<i,\ i\ne k,\ j\ne k,\ i,j,k=\overline{1,3}$, к трем равенствам

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2\right)\Bigg|_{t_j=\tau_j}dt_kdt_i+\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right)\Bigg|_{t_i=\tau_i}dt_kdt_j=2\operatorname{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t_i\partial t_j},\frac{\partial u}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2\right)\Bigg|_{t_j=0}dt_kdt_i+\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right)\Bigg|_{t_i=0}dt_kdt_j-c\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right]dt. \tag{7}$$

Под знаком второй суммы правой части равенства (6) применяем сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, со значениями в $D(A(t))$ и их свойства [6]:

1) при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t норма $\left|A_\varepsilon^{-1}(t)g-g\right|\to 0\ \forall g\in H$;

2) в гильбертовом пространстве H при всех $t\in\mathcal{T}$ существуют сильные производные $\partial A_\varepsilon^{-1}(t)/\partial t_i\in\mathcal{B}(\mathcal{T},\mathcal{L}(H))$ и верны равенства

$$\frac{\partial\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_i}=-A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t),\ i=\overline{1,3}.$$

Интегрируя один раз по t_j от 0 до τ_j, находим три равенства

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u\right)\right)\Big|_{t_j=\tau_j}dt_kdt_i=2\operatorname{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u\right)\right)\Big|_{t_j=0}dt_kdt_i+\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\Phi_{j,\varepsilon}(u,u)dt,\ j<i,\ i\ne k,\ j\ne k,\ i,j,k=\overline{1,3}, \tag{8}$$

где ввиду свойств операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ формы $\Phi_{j,\varepsilon}(u,u)$ имеют вид

$$\Phi_{j,\varepsilon}(u,u)=\left[\left(\frac{\partial\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_j}u,u\right)-c\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u\right)\right]=\left(\frac{\partial A(t)^{-1}}{\partial t_j}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u\right)-c\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u\right).$$

В силу свойств 1) и 2) сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ в равенстве (8) устремляем $\varepsilon\to 0$, применяем оценки (4) и приходим к трем неравенствам

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_j=\tau_j} dt_k dt_i \le 2\,\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k}\left(e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_j=0} dt_k dt_i+$$
$$+(c_4-c)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt,\ \ j<i,\ i\ne k,\ j\ne k,\ i,j,k=\overline{1,3}. \qquad (9)$$

В силу оценки (3) третий интеграл правой части равенства (6), удовлетворяет неравенству

$$-2c_3\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2\right)dt\le$$
$$\le 2\,\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}+A_3(t)\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt. \qquad (10)$$

В четвертом интеграле правой части равенства (6), интегрируя по частям по t_1, получаем равенство

$$\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_3}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)\right)\Bigg|_{t_1=\tau_1} dt_3 dt_2=\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt+\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\right)dt+$$
$$+\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_3}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)\right)\Bigg|_{t_1=0} dt_3 dt_2-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt. \qquad (11)$$

В пятом и шестом интегралах правой части равенства (6) аналогично интегрируем по частям соответственно по t_2 и t_3 и приходим к равенствам

$$\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_3}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right)\Bigg|_{t_2=\tau_2} dt_3 dt_1=\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt+\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\right)dt+$$
$$+\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_3}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right)\Bigg|_{t_2=0} dt_3 dt_1-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt, \qquad (12)$$

$$\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)\Bigg|_{t_3=\tau_3} dt_2 dt_1=\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\right)dt+$$
$$+\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)\Bigg|_{t_3=0} dt_2 dt_1-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt. \qquad (13)$$

Складываем почленно соотношения (7), (9) – (13), используем тождество (6) и получаем следующее неравенство:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\ne i,k\ne j}}^{3}\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_j}\left[e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t_i},\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)+\left|A^{1/2}u\right|^2\right)\right]\Bigg|_{t_k=\tau_k} dt_j dt_i\le$$
$$\le 2\,\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(L(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt+$$
$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\ne i,k\ne j}}^{3}\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_j}\left[e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t_i},\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)+\left|A^{1/2}u\right|^2\right)\right]\Bigg|_{t_k=0} dt_j dt_i+$$
$$+(2c_3-2c)\sum_{i=1}^{3}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 dt-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_3},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt-$$
$$-c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+3(c_4-c)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt,\ \ \forall u\in D(L).$$

Здесь левую часть оцениваем снизу, а в правой части используем неравенство Коши – Буняковского, приводим подобные слагаемые, при $c = \max\{c_4, 3 + 2c_3\}$ отбрасываем неположительные слагаемые, берем точную верхнюю грань по $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} \in T$ обеих частей полученного неравенства и приходим к неравенству (5) для гладких решений $u \in D(L)$ задачи (1), (2). Затем это неравенство распространяем предельным переходом на все сильные решения $u \in D(\overline{L})$. Теорема 1 доказана.

Стандартным образом доказывается

Следствие 1. Если выполняются предположения теоремы 1, то для каждой функции $\Phi(t)$ из подпространства $F_1 = R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$ гильбертова пространства F, где $R(\overline{L})$ – множество значений оператора $\overline{L}$ и $\overline{R(L)}$ – замыкание множества значений $R(L)$ оператора L в F, сильное решение $u \in E$ граничной задачи (1), (2) существует, единственно и непрерывно зависит от f, φ_i, $i = \overline{1,3}$.

1. Мотевич А.В. // Вестн. БГУ. 2011. Сер. 1. № 1. С. 80.
2. Korzyuk V.I. // Mathematical Modelling and Analysis. 2001. Vol. 6. № 2. P. 270.
3. Джохадзе О.М. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 3. С. 385.
4. Корзюк В.И., Чеб Е.С. // Там же. 2009. Т. 45. № 10. С. 1435.
5. Бенуар Н.Э., Корзюк В.И. / В.И. Корзюк и [др.]; Деп. в БелНИИНТИ 24.06.83, № 660 // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1984. № 3. С. 70.
6. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.

Поступила в редакцию 23.12.10.

Антон Викторович Мотевич – аспирант кафедры математической кибернетики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики Ф.Е. Ломовцев.