УДК 517.9+531.19

Г.Н. ГУБАЛЬ (УКРАИНА), А.И. СЛОБОДЯНЮК

СХОДИМОСТЬ КИНЕТИЧЕСКОГО КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

It is considered symmetric system of many particles interacting via a pair potential. It is used a representation of a solution of the Cauchy problem for the Bogolyubov chain of equations in the form of the kinetic cluster expansion – an expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants (semi-invariants) of the evolution operator of the corresponding particle group. It is proved the convergence of the kinetic cluster expansion for particle system under consideration.

Эволюция состояний многочастичных систем описывается цепочкой уравнений Боголюбова [1, 2]. Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова представляется в форме ряда итераций или функционального ряда (неравновесного кластерного разложения) [2–4]. В этой работе использовано представление решения в форме кинетического кластерного разложения – разложения по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты (семиинварианты) эволюционного оператора соответствующей группы частиц [5]. Такое представление решения дает возможность детально описать кластерный характер эволюции бесконечных систем частиц с разными свойствами симметрии.

В некоторых случаях состояния многочастичных систем можно описать в терминах одночастичных функций распределения, которые удовлетворяют некоторое замкнутое эволюционное уравнение.

В настоящей работе доказана сходимость кинетического кластерного разложения для симметричной системы частиц. Для математической формулировки этой задачи рассмотрена задача Коши для цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными, которые являются произведениями одночастичных функций распределения. Такое предположение для начальных данных естественно для кинетического описания газа, поскольку его состояния в данном случае описываются только одночастичной функцией распределения.

Далее нами сформулирована постановка исследуемой проблемы, доказана сходимость кинетического кластерного разложения – разложения по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты (семиинварианты) эволюционного оператора соответствующей группы частиц.

Постановка задачи

Рассмотрим симметричную систему многих частиц с массой $m=1$, взаимодействующих посредством парного потенциала Φ. Считаем, что потенциал взаимодействия Φ удовлетворяет условиям, гарантирующим существование глобального по времени решения начальной задачи уравнений Гамильтона для системы конечного числа частиц. Например, Φ – дважды непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем.

Каждая *i*-я частица характеризуется фазовыми координатами $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^{\nu} \times \mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \geq 1$.

Пусть $L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$ – линейное пространство суммируемых функций $f_s(x_1,\ldots,x_s)$, определенных на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s}$, симметричных относительно перестановок аргументов $(x_1,\ldots,x_s)$ с нормой

$$\|f_s\| = \int\limits_{\mathbb{R}^{\nu s}\times\mathbb{R}^{\nu s}} dx_1 \ldots dx_s \left| f_s(x_1,\ldots,x_s) \right|.$$

Определим множество $L_0^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, всюду плотное в $L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, функций $f_s \in L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$ с компактными носителями, которые непрерывно дифференцируемы по переменным $(x_1,\ldots,x_s)$. Через L_α^1 обозначим банахово пространство бесконечных последовательностей $f = \{f_s(x_1,\ldots,x_s)\}_{s\geq 0}$:

$$L_\alpha^1 = \oplus_{s=0}^{\infty} \alpha^s L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s}),$$

где число $\alpha > 1$.

Состояние такой системы определяется решением задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F_s(t, x_1,\ldots,x_s) = \{H_s(x_1,\ldots,x_s), F_s(t,x_1,\ldots,x_s)\} + \\ &+\frac{1}{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}} dx_{s+1} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \Phi(q_i - q_{s+1}), F_{s+1}(t, x_1,\ldots,x_{s+1}) \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными данными, имеющими свойство факторизации (хаоса):

$$F_1(t,x_1)\big|_{t=0}=F_1(0,x_1),\quad F_s(t,x_1,\dots,x_s)\big|_{t=0}=\prod_{i=1}^{s}F_1(0,x_i),\quad s\geq 2, \tag{2}$$

где $H_s(x_1,\dots,x_s)$ – функция Гамильтона, $\dfrac{1}{\upsilon}$ – плотность, $\{\cdot,\cdot\}$ – скобка Пуассона [2], $F_1(0,x_i)\in L_0^1(\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu)$.

Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова представляется в форме разложения по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты [5]

$$F_{|Y|}(t,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus Y)\mathfrak{A}_{|X_Y|}(t,X_Y)F_{|X|}(0,X), \tag{3}$$

где

$$Y=(x_1,\dots,x_s),\quad X=(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_{s+n}),\quad X_Y=(Y,x_{s+1},\dots,x_{s+n}),$$

$$\mathfrak{A}_{|X_Y|}(t,X_Y)=\sum_{P:\,X_Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\prod_{X_i\subset P}S_{|X_i|}(-t,X_i),\quad |X\setminus Y|\geq 0,$$

$\sum\limits_{P}$ – сумма по всем возможным разбиениям множества X_Y на $|P|$ непустых взаимно непересекающихся подмножеств $X_i\subset X_Y$, причем множество Y целиком принадлежит одному из подмножеств X_i. $S_s(-t)$ – оператор эволюции:

$$\big(S_s(-t)f_s\big)(x_1,\dots,x_s)=f_s(X_1(-t,x_1,\dots,x_s),\dots,X_s(-t,x_1,\dots,x_s)),\quad s\geq 1,$$

где $X_i(t)=X_i(t,x_1,\dots,x_s)$, $i=1,\dots,s$, – решение начальной задачи для уравнений Гамильтона системы s частиц с начальными данными $X_i(0,x_1,\dots,x_s)=x_i$, $i=1,\dots,s$ [2].

Глобальное решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова

Для задачи Коши (1), (2) в пространстве L_α^1 с учетом (3) справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $F_1(0)\in L_0^1(\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu)\subset L^1(\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu)$, *то существует единственное сильное, глобальное по времени решение* $F(t)=\{F_s(t,Y)\}_{s=|Y|\geq 0}$, *где* $F_s(t)\in L^1(\mathbb{R}^{\nu s}\times\mathbb{R}^{\nu s})$, $s\geq 1$, *задачи Коши* (1), (2), *которое представляется разложением по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты*

$$F_s(t,Y)=S_s(-t,Y)\prod_{i=1}^{s}F_1(0,x_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus Y)\mathfrak{A}_{|X_Y|}(t,X_Y)\prod_{i=1}^{n+s}F_1(0,x_i),\quad s\geq 1. \tag{4}$$

Доказывают эту теорему стандартными методами функционального анализа. Каждый член ряда (4) определен, поскольку подынтегральное выражение определено почти всюду вне множества $\mathcal{U}_{s+n}^0$ нулевой лебеговой меры [2]. Функциональный ряд (4) сходится по норме пространства $L^1(\mathbb{R}^{\nu s}\times\mathbb{R}^{\nu s})$ для произвольного $t\in\mathbb{R}^1$. Имеет место такая оценка:

$$\|F_s(t)\|\leq\|F_1(0)\|^s e^{\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}}\frac{1}{1-\dfrac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}},\quad s\geq 1. \tag{5}$$

Действительно, обозначим через k количество подмножеств X_i в разбиении P и, учитывая, что $\|S_{|X_i|}(-t)\|=1$ в пространстве суммируемых функций, получим

$$\|F_s(t)\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus Y)\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{P:\,|P|=k}(-1)^{k-1}(k-1)!\prod_{X_i\subset P}S_{|X_i|}(-t,X_i)\prod_{i=1}^{n+s}F_1(0,x_i)\right\|\leq$$

$$\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu(n+s)}\times\mathbb{R}^{\nu(n+s)}}dX\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}(k-1)!\left|\prod_{i=1}^{n+s}F_1(0,x_i)\right|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}(k-1)!\|F_1(0)\|^{n+s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}\|F_1(0)\|^{n+s}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\|F_1(0)\|^{n+s}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\|F_1(0)\|^{n+s}=$$

$$=\|F_1(0)\|^s\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}\right)^j\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}\right)^{n-j}=\|F_1(0)\|^s e^{\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}}\frac{1}{1-\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}}.$$

О решении нелинейного уравнения для одночастичной функции распределения

Если начальные данные (2) определены в терминах одночастичной функции распределения $F_1(0)$, то задача (1), (2) не «полностью определена» в том понятии, что начальные данные $F_s(0)=\prod_{i=1}^{s}F_1(0,x_i),\ s\geq 2,$ не есть независимые для каждой неизвестной функции в (1). Поэтому переформулируем задачу (1), (2) как новую задачу Коши для независимой неизвестной функции $F_1(t)$ вместе с бесконечной последовательностью функционалов $F_s(t\,|\,F_1(t))=F_s(t,Y\,|\,F_1(t)),\ s\geq 2.$

Рассмотрим соотношение (4) при $s=1$ как замкнутое уравнение относительно $F_1(0)$ в пространстве $L^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu})$

$$F_1(0)=AF_1(0), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\big(AF_1(0)\big)(x_1)&=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)-\\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1\})\,S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_{|X_{\{x_1\}}|}(t,X_{\{x_1\}})\prod_{i=1}^{n+1}F_1(0,x_i),\end{aligned} \tag{7}$$

$d(X\setminus\{x_1\})=dx_2\dots dx_{n+1}.$

Обозначим $S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\equiv F_1^0.$ Пусть $\|F_1(t,x_1)\|\leq r<+\infty.$ Тогда $F_1^0\in L^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}),$ $\|F_1^0\|=\|S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\|\leq r<+\infty.$ В пространстве $L_0^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu})\subset L^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu})$ рассмотрим шар

$$\mathbb{S}(F_1^0,R)\equiv\left\{F_1(0)\in L_0^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}):\left\|F_1(0)-F_1^0\right\|\leq R\right\}.$$

Справедлива такая

Теорема 2. *Если*

$$\frac{1}{\upsilon}<\frac{1}{R+r}\min\{x,z\},$$

где x *– решение уравнения* $\dfrac{e^x}{1-x}=\dfrac{2R+r}{R+r},$ z *– решение уравнения* $e^z\cdot\dfrac{1+z-z^2}{(1-z)^2}=2,$ *то существует единственное решение уравнения* (6)*, которое в области* $\mathbb{S}(F_1^0,R)\subset L^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu})$ *представляется формулой*

$$F_1(0,x_1)=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1\})\tilde{\mathfrak{A}}^{(n)}(t)\prod_{i=1}^{n+1}F_1(t,x_i), \tag{8}$$

где

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)=-S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2),$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)=S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)$$

и т. д., $\hat{\mathfrak{A}}_{|X_i|}(t,X_i)=\mathfrak{A}_{|X_i|}(t,X_i)\prod_{x_j\in X_i}S_1(t,x_j).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что оператор (7) отображает область $\mathbb{S}(F_1^0,R)$ в себя и является оператором сжатия. Поскольку $\|F_1(0)\|\leq\left\|F_1(0)-F_1^0\right\|+\left\|F_1^0\right\|\leq R+r,$ то из определения (7) и условия $\left\|S_{|X_i|}(t,X_i)\right\|=1$ в пространстве суммируемых функций имеем

$$\left\| AF_1(0) - F_1^0 \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^n} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n}} d(X \setminus \{x_1\}) \, S_1(t, x_1) \mathfrak{A}_{|X_{\{x_1\}}|}(t, X_{\{x_1\}}) \prod_{i=1}^{n+1} F_1(0, x_i) \right\| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^n} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{\nu(n+1)} \times \mathbb{R}^{\nu(n+1)}} dX \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} (k-1)! \left| \prod_{i=1}^{n+1} F_1(0, x_i) \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^n} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} (k-1)! \| F_1(0) \|^{n+1} = \| F_1(0) \| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \| F_1(0) \|^n - 1 \right) =$$

$$= \| F_1(0) \| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \left(\frac{\| F_1(0) \|}{\upsilon} \right)^n - 1 \right) = \| F_1(0) \| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\| F_1(0) \|}{\upsilon} \right)^j \sum_{n=j}^{\infty} \left(\frac{\| F_1(0) \|}{\upsilon} \right)^{n-j} - 1 \right) =$$

$$= \| F_1(0) \| \left(e^{\frac{\| F_1(0) \|}{\upsilon}} \frac{1}{1 - \frac{\| F_1(0) \|}{\upsilon}} - 1 \right) \le (R + r) \left(\frac{1}{1 - \frac{R+r}{\upsilon}} e^{\frac{R+r}{\upsilon}} - 1 \right).$$

Таким образом, оператор A отображает область $\mathbb{S}(F_1^0, R)$ в себя, если

$$(R + r) \left(\frac{1}{1 - \frac{R+r}{\upsilon}} e^{\frac{R+r}{\upsilon}} - 1 \right) \le R. \tag{9}$$

Запишем условие на плотность. Пусть

$$(R + r) \left(\frac{1}{1 - \frac{R+r}{\upsilon}} e^{\frac{R+r}{\upsilon}} - 1 \right) = R,$$

тогда при $\frac{R+r}{\upsilon} = x$ имеем

$$\frac{e^x}{1 - x} = \frac{2R + r}{R + r}. \tag{10}$$

Так как в формуле (9) левая сторона меньше или равна R, то $\frac{R+r}{\upsilon} \le x.$

Таким образом, (9) дает условие на плотность

$$\frac{1}{\upsilon} \le \frac{1}{R + r} x,$$

где x – решение уравнения (10).

Найдем условие, при котором оператор A является оператором сжатия. Для произвольных элементов $Y_1, Y_2 \in \mathbb{S}(F_1^0, R)$ имеем

$$\| AY_1 - AY_2 \| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^n} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} (k-1)! \int_{\mathbb{R}^{\nu(n+1)} \times \mathbb{R}^{\nu(n+1)}} dX \left| \prod_{j=1}^{n+1} Y_1(0, x_j) - \prod_{j=1}^{n+1} Y_2(0, x_j) \right|. \tag{11}$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\prod_{j=1}^{n+1} Y_1(0, x_j) - \prod_{j=1}^{n+1} Y_2(0, x_j) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{i-1} Y_1(0, x_j) \big(Y_1(0, x_i) - Y_2(0, x_i) \big) \prod_{j=i+1}^{n+1} Y_2(0, x_j), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем индукцию по числу частиц. Очевидно, что при $n = 1$ равенство (12) справедливо. Предположим, что равенство (12) справедливо для $n = m.$ Докажем равенство (12) при $n = m + 1,$ используя предположение

$$\prod_{j=1}^{m+2} Y_1(0, x_j) - \prod_{j=1}^{m+2} Y_2(0, x_j) = \prod_{j=1}^{m+1} Y_1(0, x_j) \big(Y_1(0, x_{m+2}) - Y_2(0, x_{m+2}) \big) +$$

$$+\left(\prod_{j=1}^{m+1}Y_1(0,x_j)-\prod_{j=1}^{m+1}Y_2(0,x_j)\right)Y_2(0,x_{m+2})=\sum_{i=1}^{m+2}\prod_{j=1}^{i-1}Y_1(0,x_j)\big(Y_1(0,x_i)-Y_2(0,x_i)\big)\prod_{j=i+1}^{m+2}Y_2(0,x_j).$$

Таким образом, равенство (12) справедливо при $n\in\mathbb{N}$. ■

Согласно лемме 1 выражение (11) имеет вид

$$\|AY_1-AY_2\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}(k-1)!\left\|\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{i-1}Y_1(0,x_j)\big(Y_1(0,x_i)-Y_2(0,x_i)\big)\prod_{j=i+1}^{n+1}Y_2(0,x_j)\right\|\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}(k-1)!\sum_{i=1}^{n+1}(R+r)^{i-1}\|Y_1-Y_2\|(R+r)^{n+1-i}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}(k-1)!(n+1)(R+r)^n\|Y_1-Y_2\|=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R+r}{\upsilon}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\|Y_1-Y_2\|.$$

Условие, при котором оператор A является оператором сжатия, имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R+r}{\upsilon}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}<2. \qquad (13)$$

Найдем условие на плотность. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R+r}{\upsilon}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}=2, \qquad (14)$$

тогда при $\dfrac{R+r}{\upsilon}=z$ преобразуем левую сторону уравнения (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R+r}{\upsilon}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=j}^{\infty}z^{n+1}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{j+1}}{1-z}\right)=\frac{1}{1-z}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{jz^j}{j!}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\right)+\frac{z}{(1-z)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}=$$

$$=\frac{1}{1-z}(ze^z+e^z)+\frac{z}{(1-z)^2}e^z=e^z\cdot\frac{1+z-z^2}{(1-z)^2},$$

т. е. уравнение (14) имеет вид

$$e^z\cdot\frac{1+z-z^2}{(1-z)^2}=2. \qquad (15)$$

Так как в формуле (13) левая сторона меньше, чем 2, то $\dfrac{R+r}{\upsilon}<z$.

Таким образом, условие (13) дает следующее условие на плотность:

$$\frac{1}{\upsilon}<\frac{1}{R+r}z,$$

где z – решение уравнения (15).

Таким образом, при условии

$$\frac{1}{\upsilon}<\frac{1}{R+r}\min\{x,z\},$$

где x – решение уравнения (10), z – решение уравнения (15), существует единственное решение уравнения (6) в области $\mathbb{S}(F_1^0,R)\subset L^1(\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu)$. Это решение можно представить как предел последовательных приближений $F_1^{(n)}(0)=AF_1^{(n-1)}(0)$, где $F_1^{(0)}(0)=F_1^0\equiv S_1(t)F_1(t)$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}F_1^{(n)}(0)=F_1(0)$ имеет вид (8).

Согласно (7) первое приближение решения, которое описывает взаимодействие между частицами, выражается следующей формулой:

$$F_1^{(1)}(0)=AF_1^0=F_1^0-\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)-$$

$$-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{1}{2!}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_2dx_3\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)-\cdots.$$

Аналогично второе приближение решения, которое описывает взаимодействие между частицами, выражается следующей формулой:

$$F_1^{(2)}(0)=AF_1^{(1)}(0)=F_1^0-\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}} dx_2\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_2dx_3\Bigg(S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)+$$

$$+S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)-$$

$$-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\Bigg)+\cdots.$$

Аналогично определяется n-е приближение.

Обозначим

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)=-S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}S_1(t,x_i)=-S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2),$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)=S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)\Bigg(S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)+$$

$$+S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)\Bigg)-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)=$$

$$=S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)$$

и т. д., где $\hat{\mathfrak{A}}_{|X_i|}(t,X_i)=\mathfrak{A}_{|X_i|}(t,X_i)\prod\limits_{x_j\in X_i}S_1(t,x_j)$. Тогда получим

$$F_1(0,x_1)=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}} dx_2\,\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_2dx_3\,\tilde{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)+\cdots=$$

$$=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}} d(X\setminus\{x_1\})\,\tilde{\mathfrak{A}}^{(n)}(t)\prod_{i=1}^{n+1}F_1(t,x_i).\ \blacksquare$$

Для симметричной системы многих частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала, при малых плотностях доказана сходимость кинетического кластерного разложения, которым представляется решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными, имеющими свойство факторизации.

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946.

2. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. Dordrecht, 1997.

3. Петрина Д.Я., Герасименко В.И. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 5. С. 3.

4. Сташенко М.А., Губаль Г.Н. // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 1. С. 188. (English transl.: Siberian Math. J. 2006. Vol. 47. № 1. P. 152).

5. Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O. // J. Phys. A: Math. and General. 2004. Vol. 37. № 42. P. 9861.

Поступила в редакцию 11.11.10.

Галина Николаевна Губаль – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Луцкого национального технического университета.

Анатолий Иванович Слободянюк – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания физики и информатики.