УДК 33:517.925

Б.С. КАЛИТИН, Е.В. ТРУХАН

УСТОЙЧИВОСТЬ РЫНКА ДВУХ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ТОВАРОВ

The equilibrium of the first order model of two interchangeable goods both in general and critical cases depending on the economic forces of sellers, traders, the state and competition parameters is investigated.

Постановка задачи. Рассмотрим модель рынка двух товаров-субститутов [1]. Введем следующие обозначения: $p_j(t)$ – цена единицы j-го товара в момент времени t; p_j^0 – равновесная цена j-го товара; $q_j(t)$ – количество единиц j-го товара, продаваемого в момент t; q_j^0 – равновесное количество единиц j-го товара по цене p_j^0; p_j^* – нижнее пороговое значение цены j-го товара, связанное с осуществленными затратами продавца; p_j^{**} – верхнее потолочное значение цены j-го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать данный товар. Пусть при этом $q_j(p)$ – функция объемов продаж j-го товара рыночных цен $p = (p_1, p_2)$. Математическая модель рынка представляется в виде системы дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{v_1(p_1 - p_1^0)p_1'}{p_1 - p_1^*} - \dfrac{d_1(p_1 - p_1^0)p_1''}{p_1^{**} - p_1} - c_1((p_1 - p_1^0) - (p_2 - p_2^0)) + \dfrac{r_1}{q_1^0}(p_1 q_1(p) - p_1^0 q_1^0), \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{v_2(p_2 - p_2^0)p_2'}{p_2 - p_2^*} - \dfrac{d_2(p_2 - p_2^0)p_2''}{p_2^{**} - p_2} - c_2((p_2 - p_2^0) - (p_1 - p_1^0)) + \dfrac{r_2}{q_2^0}(p_2 q_2(p) - p_2^0 q_2^0), \end{cases} \tag{1}$$

где $p_j^* < p_j < p_j^{**}$, $j = 1, 2$, а v_j, d_j, c_j, r_j – положительные параметры модели, характеризующие интенсивности экономических сил.

Предположим, что функции объемов продаж заданы линейно по формулам

$$q_j(p) = q_j^0\left(1 - \frac{e_j}{p_j^0}(p_j - p_j^0) + \frac{e_{ji}}{p_i^0}(p_i - p_i^0)\right), \quad j, i = 1, 2,\ j \neq i,$$

где e_j – эластичность спроса по цене, а e_{ji} – перекрестная ценовая эластичность [3]. Эти величины определяются формулами

$$e_j = -\frac{p_j^0}{q_j^0}\frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_j},\ e_{jk} = \frac{p_k^0}{q_j^0}\frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_k},\ j, k = 1, 2,\ j \neq k,$$

в точке $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$.

1. Устойчивость равновесия. Отметим, что модель (1) обладает экономическим равновесием $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$. Для исследования устойчивости этого равновесия сделаем в системе (1) замену переменных $y_j = p_j - p_j^0$, $j = 1, 2$, предварительно подставив выражения для функций объемов продаж, и воспользуемся следующими обозначениями: $p_j' = p_j^0 - p_j^*$ – излишек цены продавца, $p_j'' = p_j^{**} - p_j^0$ – излишек потребительской цены. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений относительно компонент вектора $y = (y_1, y_2)$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\dfrac{v_1 p_1' y_1}{y_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' y_1}{p_1'' - y_1} - c_1(y_1 - y_2) + r_1\left((1 - e_1)y_1 + e_{12}p_{12}^0 y_2 - \dfrac{e_1}{p_1^0}y_1^2 + \dfrac{e_{12}}{p_2^0}y_1 y_2\right), \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' y_2}{y_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' y_2}{p_2'' - y_2} - c_2(y_2 - y_1) + r_2\left((1 - e_2)y_2 + e_{21}p_{21}^0 y_1 - \dfrac{e_2}{p_2^0}y_2^2 + \dfrac{e_{21}}{p_1^0}y_1 y_2\right), \end{cases} \tag{2}$$

где $p_j' < y_j < p_j''$, $j = 1, 2$. Здесь экономическому равновесию отвечает начало координат $y_1 = y_2 = 0$.

Выделим линейную и нелинейную части уравнений системы (2), записав

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -S_1 y_1 + R_1 y_2 + Y_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = R_2 y_1 - S_2 y_2 + Y_2(y_1, y_2). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь для линейной части положено

$$S_j = v_j + d_j + c_j - r_j(1-e_j), \quad R_j = c_j + r_j p_{ji}^0 e_{ji}, \;\; p_{ij}^0 = p_i^0 / p_j^0, \;\; j, i = 1, 2, \tag{4}$$

причем S_j – запас прочности рынка j-го товара [2]. Нелинейная часть определяется выражением

$$Y_j(y_1, y_2) = M_{1j} y_j^2 + \frac{r_j e_{jk}}{p_k^0} y_j y_k - H_{2j} y_j^3 + o(\| y_j \|^3), \;\; j, k = 1, 2, \; j \neq k,$$

где $o(\| y \|^3)$ означает при $y \to 0$ величину порядка малости выше третьего, и положено

$$H_{1j} = \frac{v_j}{p_j'} - \frac{d_j}{p_j''}, \;\; M_{1j} = H_{1j} - \frac{r_j e_j}{p_j^0}, \;\; H_{2j} = \frac{v_j}{p_j'^2} + \frac{d_j}{p_j''^2}. \tag{5}$$

Модель первого приближения системы (3) принимает вид системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -S_1 y_1 + R_1 y_2, \\ \dot{y}_2 = R_2 y_1 - S_2 y_2, \end{cases} \tag{6}$$

характеристическое уравнение которой задается равенством

$$\lambda^2 - \lambda(S_1 + S_2) + S_1 S_2 - R_1 R_2 = 0. \tag{7}$$

Согласно критерию Рауза – Гурвица и теореме об устойчивости по первому приближению [4] условия асимптотической устойчивости равновесия системы (3) определяются неравенствами

$$1) \; S_1 > 0, \; S_2 > 0; \; 2) \; S_1 S_2 - R_1 R_2 > 0.$$

Из этих условий напрашиваются следующие выводы экономического характера:

1. Запас прочности каждого из товаров-конкурентов рынка должен быть строго положительным ($v_j + d_j + c_j - r_j(1-e_j) > 0, \;\; j = 1, 2$). В частности, отсюда следует, что интенсивность сил конкуренции играет стабилизирующую роль в устойчивом развитии рынка. Такую же положительную роль играет и свойство ценовой эластичности товаров-конкурентов ($e_1 \geq 1$, $e_2 \geq 1$).

2. Произведение запасов прочности обоих товаров должно быть строго отделено от нуля на величину не меньше, чем произведение величины интенсивностей сил конкуренции, поскольку $R_1 R > c_1 c_2$.

Дальнейшее исследование устойчивости экономического равновесия модели связано в первую очередь с критическими случаями, когда один из корней уравнения (7) имеет нулевую вещественную часть. Нетрудно убедиться в том, что с учетом неравенств $R_j > 0, \;\; j = 1, 2,$ модели возможен лишь критический случай одного нулевого корня, для которого ниже исследуется проблема устойчивости.

Следовательно, во всех остальных ситуациях равновесие неустойчиво, что следует из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [4].

2. Критический случай одного нулевого корня. Из уравнения (7) видно, что такой случай возникает тогда, когда

$$S_1 S_2 = R_1 R_2 \tag{8}$$

и

$$S_1 > 0, S_2 > 0. \tag{9}$$

Для изучения устойчивости экономического равновесия сделаем в системе (6) замену переменных

$$x_1 = y_1, \;\; x = a_1 y_1 + a_2 y_2, \tag{10}$$

где коэффициенты a_1 и a_2 подлежат определению, причем невырожденность предполагаемого преобразования означает, что $a_2 \neq 0$. Потребуем, чтобы в результате такой замены $\dot{x} \equiv 0$. В этом случае коэффициенты a_j, $j = 1, 2,$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} S_1 a_1 - R_2 a_2 = 0, \\ R_1 a_1 - S_2 a_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

На основании требования (8) определитель такой системы равен нулю. Поэтому для нахождения коэффициентов a_1 и a_2 можно взять, например, первое из уравнений

$$S_1 a_1 - R_2 a_2 = 0. \tag{12}$$

С учетом (8) решение (12), отвечающее требованию $a_2 \neq 0$, существует только при $R_2 \neq 0$, $S_1 a_1 \neq 0$. Следовательно, уравнение (12) имеет семейство решений $a_1 = R_2 b / S_1$, $a_2 = b \neq 0$, где параметр b будет уточнен далее с целью упрощения громоздких выражений.

Таким образом, искомая замена переменных (10) имеет вид

$$x = R_2 b y_1 / S_1 + b y_2, \quad x_1 = y_1,\, b \neq 0. \tag{13}$$

Отсюда следует обратная связь между переменными

$$y_1 = x_1,\; y_2 = x / b - R_2 x_1 / S_1,\; b \neq 0. \tag{14}$$

В результате линейная система (6) преобразуется к желаемому виду

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{x}_1 = -\left(S_1 + S_2\right) x_1 + R_1 x / b,\, b \neq 0. \end{cases}$$

Замена переменных (13) исследуемой системы (3) приводит нелинейную часть второго уравнения к виду $X(x, x_1) \equiv R_2 b Y_1(y_1, y_2) / S_1 + b Y_2(y_1, y_2)$, в котором следует заменить переменные (y_1, y_2) по формулам (14). Аналогично преобразуется и нелинейная часть $X_1(x, x_1)$. В результате таких преобразований получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, x_1), \\ \dot{x}_1 = -\left(S_1 + S_2\right) x_1 + R_1 x / b + X_1(x, x_1),\; b \neq 0, \end{cases} \tag{15}$$

где с учетом обозначений (5) нелинейные слагаемые можем записать в форме

$$X(x, x_1) = \frac{M_{12}}{b} x^2 + \left(M_{12} \frac{S_2{}^2}{R_1^2} + M_{11} \frac{S_2}{R_1} - \left(\frac{S_2}{R_1} \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} + \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} \right) \frac{S_2}{R_1} \right) b x_1{}^2 + \left(\frac{S_2}{R_1} \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} + \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} - 2 \frac{M_{12} S_2}{R_1} \right) x x_1 +$$

$$+ \left(H_{22} \frac{S_2{}^3}{R_1^3} - \frac{S_2}{R_1} H_{21} \right) b x_1^3 - H_{22} \frac{1}{b^2} x^3 + 3 H_{22} \frac{1}{b} \frac{S_2}{R_1} x_1 x^2 - 3 H_{22} \frac{S_2{}^2}{R_1{}^2} x_1{}^2 x + o(\| (x, x_1) \|^3);$$

$$X_1(x, x_1) = \left(M_{11} - \frac{r_1 e_{12} S_2}{p_2^0 R_1} \right) x_1^2 + \frac{r_1 e_{12}}{b p_2^0} x_1 x - H_{21} x_1^3 + o(\| (x, x_1) \|^3).$$

Положив $X^0(x) = X(x, 0)$ и $X_1^0(x) = X_1(x, 0)$, убеждаемся, что для наименьших степеней по переменной x имеют место следующие соотношения:

$$\min\deg\left(X_1{}^0(x)\right) = \min\deg\left(X_1{}^0(x, 0)\right) \geq \min\deg\left(X^0(x)\right) = \min\deg\left(X(x, 0)\right).$$

Поэтому можно перейти к следующему этапу исследования критического случая [4]. Имея в виду, что в уравнениях (3) произведена замена переменных по формулам (13), приравняем к нулю правую часть некритического (второго) уравнения системы (15)

$$-\left(S_1 + S_2\right) x_1 + R_1 x / b + X_1(x, x_1) = 0.$$

Найдем решение $x_1 = f(x)$ данного уравнения в неявных функциях по методу неопределенных коэффициентов, положив $f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$. При нахождении коэффициентов степенного ряда $f(x)$ следует учитывать тот факт, что минимальная степень, с которой в выражение $X(x, x_1)$ входит x_1, – это степень два. Отметим, что параметр β после замены $x_1 = f(x)$ входит в нелинейную часть $X(x, x_1)$, начиная с коэффициентов при третьей степени x; последующие параметры – γ и т. д. входят в выражения для $X(x, x_1)$, начиная с более высоких степеней x, поэтому, если ограничиться лишь коэффициентами при первой и второй степени, такие слагаемые в рассмотрение включаться не будут.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим α и β из системы уравнений

$$\begin{cases} (-S_1 - S_2)\alpha + \dfrac{R_1}{b} = 0, \\ \left(M_{11} - \dfrac{r_1 e_{12}}{p_2^0} \dfrac{S_2}{R_1} \right) \alpha^2 + \dfrac{r_1 e_{12}}{p_2^0} \dfrac{1}{b} \alpha + (-S_1 - S_2)\beta = 0. \end{cases}$$

Положим здесь $b = 1/(S_1 + S_2)^2$, тогда с учетом неравенства (9) получаем решение этой системы

$$\alpha = (S_1 + S_2) R_1;\; \beta = (S_1 + S_2) R_1 (R_1 p_2^0 M_{11} + r_1 e_{12} S_1) / p_2^0. \tag{16}$$

Таким образом, с учетом формул (16) правая часть первого уравнения системы (15) преобразуется к следующему виду:

$$X(x, x_1) = F x^2 + G x^3 + o(\| x \|^3),$$

где при использовании равенства $R_2 = S_1 S_2 / R_1$ (условие критического случая) будем иметь

$$F = M_{12} S_1^{\ 2} + M_{11} S_2 R_1 + \left(\frac{S_2}{R_1} \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} + \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} \right) S_1 R_1;$$

$$\begin{gathered} G = \left(R_1^2 M_{11} + R_1 S_1 \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} \right) \left(2M_{11} S_2 - 2M_{12} R_2 + \left(\frac{R_2}{S_1} \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} + \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} \right) (S_1 - S_2) \right) - \\ - (S_1 + S_2)(H_{22} S_1^3 + S_2 R_1^2 H_{21}). \end{gathered} \tag{17}$$

Замечание 1. Если в проведенных исследованиях воспользоваться не первым из равенств (11), а вторым, то получим формулы для *F* и *G*, аналогичные формулам (17), но с заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1, а именно будем иметь выражения

$$F = M_{11} S_2^2 + M_{12} S_1 R_2 + \left(\frac{S_1}{R_2} \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} + \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} \right) S_2 R_2;$$

$$\begin{gathered} G = (R_2^2 M_{12} + R_2 S_2 \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0}) \left(2M_{12} S_1 - 2M_{11} R_1 + \left(\frac{R_1}{S_2} \frac{r_2 e_{21}}{p_1^0} + \frac{r_1 e_{12}}{p_2^0} \right) (S_2 - S_1) \right) - \\ -(S_2 + S_1)(H_{21} S_2^3 + S_1 R_2^2 H_{22}). \end{gathered} \tag{17$'$}$$

Таким образом, проведенные исследования модели приводят к следующему утверждению [4].

Теорема 1. *Экономическое равновесие* $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$ *рынка двух взаимозаменяемых товаров асимптотически устойчиво, если запас прочности каждого из товаров-конкурентов строго положителен, т. е.*

$$v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1) > 0, \ \ v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2) > 0,$$

и выполняется одно из следующих двух условий:

$$1) \ (v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1))(v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2)) > \left(c_1 + r_1 \frac{p_1^0}{p_2^0} e_{12} \right) \left(c_2 + r_2 \frac{p_2^0}{p_1^0} e_{21} \right)$$

либо

$$2) \ (v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1))(v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2)) = \left(c_1 + r_1 \frac{p_1^0}{p_2^0} e_{12} \right) \left(c_2 + r_2 \frac{p_2^0}{p_1^0} e_{21} \right), \ \ F = 0, \ \ G < 0,$$

где величины F и G определяются формулами (5), (17).

Во всех остальных случаях, кроме $F = 0$, $G = 0$, *равновесие неустойчиво*.

В случае $F = 0$, $G = 0$ *необходимы дальнейшие исследования.*

Замечание 2. Нетрудно показать, что при надлежащих значениях параметров модели величины *F* и *G* могут принимать значения разных знаков, в том числе и обращаться в нуль. Поэтому каждый из вариантов знаков величин *F* и *G*, указанных в теореме, может быть реализован.

Замечание 3. В критическом случае, в отличие от исследования устойчивости экономического равновесия по системе первого приближения, условия устойчивости или неустойчивости представляют собой громоздкие выражения, включающие в себя все параметры математической модели. Для пояснения этих условий, опирающихся на выражения *F* и *G*, рассмотрим так называемый абсолютно симметричный случай. Речь идет о ситуации, когда обоим товарам-конкурентам соответствуют полностью совпадающие значения параметров модели, а именно $v = v_j$, $d = d_j$, $c = c_j$, $r = r_j$, $p = p_j^0$, $p_j' = p'$, $p_j'' = p''$, $j = 1, 2$, $e = e_1 = e_2, e_{12} = e_{21}$. В этом случае имеем *R* = *S* и тогда

$$F = 2S^2 \left(\frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} - \frac{re}{p^0} + \frac{re_{12}}{p^0} \right).$$

Следовательно, условия, что $F = 0$ или $F \neq 0$, соответственно равносильны соотношениям

$$\frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} = \frac{r(e - e_{12})}{p^0} \ \text{ или } \ \frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} \neq \frac{r(e - e_{12})}{p^0}.$$

С экономической точки зрения первое из этих равенств означает определенный паритет между производителями, потребителями и государством с учетом свойств эластичности спроса по цене и перекрестной ценовой эластичности. Поэтому из теоремы следует, что, если этот паритет нарушается, т. е. $F \neq 0,$ модель неустойчива.

В случае же $F = 0$ выражение для G упрощается и принимает вид $G = -4S^4 H_2 < 0.$ Поэтому получаем асимптотическую устойчивость экономического равновесия.

3. Постоянный объем продаж. Для частного случая с постоянным объемом продаж $q_j(p) = q_j^0,\ j = 1, 2,$ модель описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{v_1(p_1 - p_1^0)p_1'}{p_1 - p_1^*} - \dfrac{d_1(p_1 - p_1^0)p_1''}{p_1^{**} - p_1} + r_1(p_1 - p_1^0) - c_1((p_1 - p_1^0) - (p_2 - p_2^0)), \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{v_2(p_2 - p_2^0)p_2'}{p_2 - p_2^*} - \dfrac{d_2(p_2 - p_2^0)p_2''}{p_2^{**} - p_2} + r_2(p_2 - p_2^0) - c_2((p_2 - p_2^0) - (p_1 - p_1^0)). \end{cases}$$

Условия асимптотической устойчивости по первому приближению для такой системы задаются неравенствами

$$1)\ S_1 > 0,\ S_2 > 0;\ 2)\ S_1 S_2 - c_1 c_2 > 0,$$

где запас прочности товаров-конкурентов определяется формулой $S_j = v_j + d_j + c_j - r_j,\ j = 1, 2.$

Для критического случая, когда $S_1 S_2 = c_1 c_2,$ формулы (17) соответственно принимают вид

$$F = H_{12} S_1^2 + H_{11} S_2 R_1;\ G = 2H_{11} R_1^2 (H_{11} S_2 - H_{12} R_2) - (S_1 + S_2)(H_{22} S_1^3 + H_{21} S_2 R_1^2).$$

Формулы $(17')$ преобразуются аналогичным образом. При этом выводы экономического характера, отмеченные в замечании 3, формальным образом получаются при условии равенства нулю ценовой эластичности ($e = 0$) и перекрестной ценовой эластичности ($e_{12} = 0$).

При $F = 0$, т. е. $H_{12} = -H_{11} S_2 c_1 / S_1^2,$ и $S_1 S_2 = c_1 c_2$ (условие критического случая одного нулевого корня) выражение G преобразуется к виду

$$G = (S_2 + S_1)(2H_{11}^2 c_1^2 S_2 - H_{22} S_1^4 - H_{21} S_2 S_1 c_1^2) / S_1.$$

Поэтому здесь условия асимптотической устойчивости и неустойчивости соответственно принимают вид неравенств

$$c_1^2 S_2 (2H_{11}^2 - H_{21} S_1) < H_{22} S_1^4 \ \text{ и } \ c_1^2 S_2 (2H_{11}^2 - H_{21} S_1) > H_{22} S_1^4.$$

3.1. Случай совпадающих параметров конкурентов. Если, как и выше, предположить, что товары-конкуренты равноправны, т. е. их параметры полностью совпадают, то

$$F = SH_1(S + c).$$

При условии, что $F = 0$ (т. е. $H_1 = 0$) и $S = R = c$ (условие критического случая одного нулевого корня) выражение G преобразуется к виду

$$G = -4c^4 H_2.$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для рынка двух взаимозаменяемых товаров имеют место следующие условия*:

1) $v = v_j,\ d = d_j,\ c = c_j,\ r = r_j,\ p = p_j^0,\ p_j' = p',\ p_j'' = p'',\ \ j = 1, 2,\ \ e = e_1 = e_2, e_{12} = e_{21};$

2) *объемы продаж постоянны* $q_j(p) = q_j^0,\ j = 1, 2.$

Тогда экономическое равновесие $p_1 = p_1^0,\ \ p_2 = p_2^0$ *асимптотически устойчиво, если выполняется одно из следующих двух условий*:

$$1)\ v + d > r \ \text{ либо } 2)\ v + d = r,\ \ \frac{v}{p'} = \frac{d}{p''}.$$

Во всех остальных случаях равновесие неустойчиво.

1. Калитин Б.С., Трухан Е.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 80.
2. Калитин Б.С. Математические модели экономики. Мн., 2004.
3. Долан Э.Дж., Линсдей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.

Поступила в редакцию 22.10.10.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

Екатерина Владимировна Трухан – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – Б.С. Калитин.