УДК 512.55

В.М. ШИРЯЕВ

РАЗЛОЖЕНИЯ ФЛЕКСИБИЛЬНЫХ *m*-КОЛЕЦ

The article deals with flexible m-rings, *i. e.* such m-rings (К, +,·, ○), in which for every two elements $a, b \in$ К their exists integers m, n such that $a \circ b = b^{[m]} \circ a^{[n]}$ and $m + n > 2$. It is proved, that any flexible m-ring К is a semidirect product of the ideal $\mathcal{N}$(К), consisting of all nilpotent elements, by sub-m-ring $\mathcal{G}$(К), consisting of cyclic elements, and $\mathcal{N}$(К)○К = К○$\mathcal{N}$(К) = {0}. In its turn, the m-ring $\mathcal{G}$(К) is a direct sum of two ideals, the first of them being a pseudoboolean m-ring, where the multiplication coincides with the superposition, the other being completely regular periodic m-ring with null multiplication, with central idempotents and whose o-semigroup decomposes into a semilattice of periodic quasihamiltonian groups.

Используются терминология и обозначения, введенные в [1–3], а также принятые в теории полугрупп [4, 5], …, групп [6, 7], …, колец и почтиколец [8–10]. Универсальная алгебра (К, +, ·, ○) называется m-кольцом, если алгебра (К, +, ·) является ассоциативным коммутативным кольцом с операциями сложения “+” и умножения “·” (редукт m-кольца К), алгебра (К, ○) – полугруппой с операцией суперпозиции “○” (o-полугруппа m-кольца К), которая дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения. В частности, m-кольцо является правым почтикольцом [9] относительно операций сложения и суперпозиции, и аналоги многих утверждений о почтикольцах оказываются справедливыми для m-колец. Другие названия для m-колец: Ω-полугруппы [11], 2Ω-почтикольца [12], Ω-кольцоиды [13] (для случая, когда Ω – тип ассоциативного коммутативного кольца); композиционные кольца [14], три-операционные кольца [15, 16] и др.

Целью данной статьи является обобщение некоторых результатов теории колец и почтиколец, касающихся полиномиальных условий, приводящих к прямым (или полупрямым) разложениям или коммутативности. Эта тема активно развивается многими авторами [17–21], начиная со знаменитой “$x^n - x$-теоремы” Джекобсона [8, 22]. Для формулировки теорем приведем требующиеся обозначения и напомним некоторые определения из литературы по m-кольцам [1–3]. Пусть (К, +, ·, ○) есть m-кольцо. Тогда $\mathcal{N}(К) = \{ x \in К \mid \exists n \in \mathbb{N}\,(x^{[n]} = 0) \}$ – множество всех нильпотентных элементов, $\mathcal{C}(К) = \{ x \in К \mid \forall a \in К\,(x \circ a = a \circ x) \}$ – множество всех центральных элементов, $\mathcal{E}(К) = \{ x \in К \mid x = x^{[2]} \}$ – множество всех идемпотентов, $\mathcal{G}(К) = \{ x \in К \mid \exists n \in \mathbb{N}\,(n > 1 \wedge x = x^{[n]}) \}$ – множество всех циклических элементов, $\mathcal{D}$(К) – множество всех дистрибутивных элементов. m-Кольцо К называется нуль-симметричным, если К○0 = {0}; c-коммутативным, если $\mathcal{C}$(К) = К; с нулевым умножением, если К·К = {0}; 0-коммутативным, если выполняется соотношение

$$\forall a, b \in К\,(a \circ b = 0 \Rightarrow b \circ a = 0);$$

вполне полупростым (без нильпотентных элементов), если $\mathcal{N}$(К) = {0}; вполне простым (без делителей нуля), если $К^{\#} \circ К^{\#} \subseteq К^{\#}$; *d. g.*-$m$-кольцом, если множество $\mathcal{D}$(К) дистрибутивных элементов порождает К; вполне регулярным, инверсным, периодическим, если его o-полугруппа обладает соответствующим свойством; ниль-центральным, если $\mathcal{N}(К) \subseteq \mathcal{C}(К)$; $\mathcal{E}$-центральным, если $\mathcal{E}(К) \subseteq \mathcal{C}(К)$; J-$m$-кольцом, если К = $\mathcal{G}$(К); идемпотентным, если К = $\mathcal{E}$(К). Идемпотентное c-коммутативное m-кольцо (К, +, ·, ○) называется обобщенным булевым, если кольцо (К, +, ○) является обобщенным булевым кольцом [3, 4], т. е. каждый главный идеал является булевой решеткой [23] относительно порядка, заданного по формуле для $a, b \in$ E(К)

$$a \le b \Leftrightarrow a = b \circ a, \tag{1}$$

а умножение совпадает с суперпозицией. Если это кольцо имеет единицу, то m-кольцо К называется булевым m-кольцом. Также m-кольцо К называется m-кольцом с делением, если его o-полугруппа является группой с внешне присоединенным нулем. Умножение в этом случае называется тривиальным, если либо К·К = {0}, либо m-кольцо К является двухэлементным булевым. Все рассматриваемые m-кольца предполагаются нуль-симметричными. Напомним еще, что вполне регулярная инверсная полугруппа разлагается в полурешетку подгрупп [4, 5]. Группа называется гамильтоновой [7] или дедекиндовой [24], если всякая ее подгруппа нормальна. Более широкий класс составляют квазигамильтоновы [25] (по-другому, квазиабелевы [26]) группы, у которых любые две подгруппы перестановочны.

Основным объектом изучения здесь являются флексибильные m-кольца – это такие m-кольца (К, +, ·, ○), для которых выполняется условие

$$\forall a, b \in К\ \exists m, n \in \mathbb{N}\ (m + n > 1 \wedge a \circ b = b^{[m]} \circ a^{[n]}). \tag{2}$$

Таким же образом определяются флексибильные почтикольца и кольца. Отметим, что для ассоциативных колец условие (2) приводит к коммутативности, как показано в [19].

Теорема 1. *Пусть* К – *флексибильное вполне полупростое m-кольцо. Тогда оно разлагается в подпрямое произведение m-колец с делением и с тривиальным умножением, а его о-полугруппа разлагается в полурешетку периодических квазигамильтоновых групп.*

Теорема 2. *Пусть* К – *флексибильное вполне полупростое m-кольцо. Тогда имеются три возможности:*

А) К − *обобщенное булево m-кольцо;*

Б) К − *вполне регулярное инверсное $\mathcal{E}$-центральное* J-*m-кольцо с нулевым умножением, о-полугруппа которого разлагается в полурешетку периодических квазигамильтоновых групп;*

В) *m-кольцо* К *изоморфно прямому произведению двух m-колец, которые удовлетворяют соответственно условиям* А) и Б).

Следствие 1. Флексибильное вполне полупростое d. g.-m-кольцо c-коммутативно.

Теорема 3. *Пусть* К – *флексибильное m-кольцо. Если* $\mathcal{N}$(К) = К, то К$\circ$К = {0}. *Если* $\mathcal{N}$(К) $\neq$ К, *то множество* $\mathcal{N}$(К) *является идеалом m-кольца* К, а $\mathcal{G}$(К) – *его под-m-кольцом* К, *которое как m-кольцо является флексибильным вполне полупростым. При этом* К = $\mathcal{N}$(К) + $\mathcal{G}$(К), К$\circ\mathcal{N}$(К) = = $\mathcal{N}$(К)$\circ$К = {0}= $\mathcal{N}$(К)$\cap\mathcal{G}$ (К). *Таким образом, всякое флексибильное m-кольцо* К *либо является m-кольцом с нулевой суперпозицией, либо флексибильным вполне полупростым m-кольцом*, *либо полупрямым произведением m-кольца с нулевой суперпозицией и флексибильного вполне полупростого m-кольца. В последнем случае множество* $\mathcal{G}$(К) *является идеалом почтикольца* (К, +, $\circ$) *и это почтикольцо разлагается в прямую сумму идеалов* $\mathcal{N}$(К) и $\mathcal{G}$(К).

Доказательство теоремы 1 проводим начиная с нескольких лемм.

Лемма 1. *Пусть* К – *флексибильное m-кольцо. Тогда оно является* 0-*коммутативным*, *периодическим* и *$\mathcal{E}$-центральным*.

Доказательство. Пусть $x\in$К. Из соотношения (2) непосредственно следует существование натурального $n > 2$ такого, что

$$x^{[2]} = x^{[n]}. \tag{3}$$

Значит, *m*-кольцо К периодично. Далее, для $x, y \in$К, если $x\circ y = 0$, то согласно соотношению (2) $y\circ x = x^{[m]} \circ y^{[n]}$ для некоторых натуральных чисел *m* и *n*, в сумме больших 1.

Тогда $y\circ x\in$К$\circ x\circ y\circ$К$\cup x\circ y\circ$К$\cup$ К$\circ x\circ y$ = {0}. Значит, *m*-кольцо К 0-коммутативно. Предположим теперь, что $x\in$К, $e\in\mathcal{E}$(К). Согласно (2) для некоторых $m, n\in\mathbb{N}$ имеем $a\circ e = e^{[m]}\circ a^{[n]} = e\circ a^{[n]}$, откуда вытекает, что $a\circ e = e\circ a\circ e$. Аналогично $e\circ a = e\circ a\circ e$, так что $a\circ e = e\circ a$. Значит, $\mathcal{E}$(К) $\subseteq$ C(К) и К $\mathcal{E}$-центрально. ■

$\mathcal{E}$-центральность *m*-кольца К позволяет использовать предложение 2.6.1 гл. IV [3], согласно которому получим

Следствие 2. *Пусть* К – *флексибильное m-кольцо. Тогда множество* $\mathcal{E}$(К) *является подполугруппой о-полугруппы m-кольца* К *и относительно порядка "≤", заданного по формуле* (3)*, является полурешеткой, где наименьшей общей мажорантой* $e\wedge f$ *для* $e, f \in \mathcal{E}$(К) *является их суперпозиция* $e\circ f$. *Более того, эта полурешетка является на самом деле решеткой относительно этого порядка, где наименьшей общей мажорантой* $e\vee f$ *для* $e, f \in\mathcal{E}$(К) *является идемпотент* $e + f - e\circ f$. Кроме того, *решетка* ($\mathcal{E}$(К), $\wedge$, $\vee$) *оказывается обобщенной булевой*, *т. е. для* $e\in\mathcal{E}$(К) *идеал* $\downarrow e = \{ f \in$E(К) $| f \leq e \}$ *является булевой решеткой.* ■

Отметим, что дополнением идемпотента $f \leq e$ в решетке $\downarrow e$ будет идемпотент $e - f$.

Лемма 2. *Флексибильное вполне полупростое m-кольцо является* J-*m-кольцом.*

Доказательство. Пусть К – флексибильное вполне полупростое *m*-кольцо и $x\in$К. Из соотношения (3) выводим равенства $(x - x^{[n-1]})\circ x = 0$ и $(x - x^{[n-1]})\circ x^{[n-1]} = 0$. Из этого благодаря 0-коммутативности *m*-кольца К (лемма 1) получим $a\circ(a - a^{[n-1]}) = 0$, $a^{[n-1]}\circ(a - a^{[n-1]}) = 0$, откуда выводится равенство $(a - a^{[n-1]})\circ(a - a^{[n-1]}) = 0$. Так как К вполне полупросто, то $a - a^{[n-1]} = 0$ и $a = a^{[n-1]}$. ■

Из этой леммы следует, что флексибильное вполне полупростое *m*-кольцо К вполне регулярно и его *о*-полугруппа является объединением периодических подгрупп. Зафиксируем произвольный элемент $a \in$ К и натуральное число $n > 1$ такое, что $a = a^{[n]}$. Обозначим через G максимальную подгруппу полугруппы (К, $\circ$). Очевидно, что элемент $e = a^{[n-1]}$ является идемпотентом и единицей этой группы G_a, а элемент $a^{[2n-3]}$ является обратным для a в этой подгруппе.

Лемма 3. *Пусть* К *– флексибильное вполне простое не одноэлементное m-кольцо. Тогда* К *– периодическое m-кольцо с делением и с тривиальным умножением*.

Доказательство. Согласно лемме 1 полугруппа (К, $\circ$) является объединением групп, а так как имеется ненулевой идемпотент и m-кольцо К без делителей нуля, то согласно следствию 12 из п. 2.5 гл. IV [3] такой идемпотент должен быть единственным и эта полугруппа является группой с внешне присоединенным нулем, т. е. К – периодическое m-кольцо с делением. То, что умножение “·” тривиально, следует из периодичности согласно предложению 1.3.4 гл. IV [3]. ■

Следствие 3. Всякое флексибильное вполне полупростое m-кольцо разлагается в подпрямое произведение периодических m-колец с делением и с тривиальным умножением.

Доказательство. Согласно следствию 2.5.12 гл. IV [3] m-кольцо К как вполне полупростое разлагается в подпрямое произведение вполне простых, а так как соотношение (2) сохраняется при гомоморфизмах, то каждая компонента этого разложения является флексибильным вполне простым m-кольцом, которое по лемме 3 есть периодическое m-кольцо с делением. ■

Продолжим доказательство теоремы 1 в предположении, что К – флексибильное вполне полупростое m-кольцо. Из леммы 2 следует, что полугруппа (К, $\circ$) является объединением периодических групп, а из следствия 2 вытекает, что полугруппа (К, $\circ$) оказывается инверсной вполне регулярной и потому разлагается в полурешетку периодических групп [5]. ■

Для дальнейшего понадобится очевидная

Лемма 4. *Пусть (G,* $\circ$*) − группа. Тогда для нее выполняется условие (2) в том и только в том случае, когда она является периодической квазигамильтоновой*. ■

В связи с этим отметим, что в противоположность к случаю колец флексибильные почтикольца не обязательно коммутативны, а, значит, флексибильные m-кольца не обязательно c-коммутативны, как показывает следующий

Пример 1. Пусть (К, +, ·, $\circ$) − m-кольцо с нулевым умножением такое, что (К, +, $\circ$) является правым почтиполем типа Диксона [27–30] с параметрами $q = 3$, $n = 2$ и числом элементов 9. В качестве аддитивной группы (К, +) возьмем аддитивную группу поля F_9. Пусть α – первообразный элемент этого поля. Операция “$\circ$” суперпозиции “$\circ$” на множестве К определяется по правилу: для $a, b \in$ К

$$a \circ b = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a = 0 \vee b = 0; \\ a \cdot b, & \text{если} \quad b = \alpha^i, i \in 2\mathbb{Z}; \\ a^3 \cdot b, & \text{если} \quad b = \alpha^i, i \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases} \tag{4}$$

Группа ($К^{\#}$, $\circ$) имеет порядок 8 и не абелева. С помощью формулы (4) выводим: $(\alpha)^{[2]} = \alpha^4 = (\alpha^3)^{[2]}$, $\alpha^{[3]} = \alpha^5$, $\alpha^{[4]} = 1$, $\alpha^3 \circ \alpha = \alpha^2 = \alpha^5 \circ \alpha^3 = \alpha^{[3]} \circ \alpha^3$. Отсюда следует, что ($К^{\#}$, $\circ$) − группа кватернионов, которая гамильтонова, так что согласно лемме 4 m-кольцо (К, +, ·, $\circ$) флексибильно. ■

Так как рассмотренное в этом примере m-кольцо вполне полупросто, то отсюда получаем

Следствие 4. Не всякое флексибильное вполне полупростое m-кольцо c-коммутативно. ■

Доказательство теоремы 2. Согласно следствию 1 имеется семейство идеалов $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ m-кольца К, удовлетворяющее условиям:

М1) $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$;

М2) для каждого $\lambda \in \Lambda$ фактор-m-кольцо $К_\lambda = К/M_\lambda$ является m-кольцом с делением, причем либо

а) $|К_\lambda| = 2$ и умножение совпадает с суперпозицией,

либо

б) $\forall\, a, b \in К\ (a \cdot b \in M_\lambda)$.

Условие а) означает выполнение соотношения

$$\forall\, a, b \in К \setminus M_\lambda (\, a \circ b - a \in M_\lambda \wedge a \cdot b - a \in M_\lambda). \tag{5}$$

Введем обозначения

$$\Lambda_0 = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \text{для индекса } \lambda \text{ выполняется условие а)}\},$$
$$\Lambda_1 = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \text{для индекса } \lambda \text{ выполняется условие б)}\,\},$$

если $\Lambda_0 \neq \varnothing$, то $I_0 = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda$, $A_0 = К/I_0$, а если $\Lambda_1 \neq \varnothing$, то $I_1 = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} M_\lambda$, $A_1 = К/I_1$.

В случае $\Lambda_0 \neq \varnothing$ почтикольцо $(A_0, +, \circ)$ является согласно соотношению (5) подпрямым произведением двухэлементных полей и потому обобщенным булевым кольцом, т. е. полугруппа $(A_0, \circ)$ представляет собой коммутативную полугруппу идемпотентов, а относительно порядка “$\leq$”, введенного по формуле (1), является обобщенной булевой решеткой. При этом на m-кольце $(A_0, +, \cdot, \circ)$ умножение совпадает с суперпозицией.

В случае $\Lambda_1 \neq \varnothing$ умножение на m-кольце A_1 нулевое, это m-кольцо вполне полупросто, инверсно, флексибильно, и, как и в первом случае, структура этого m-кольца определяется структурой почтикольца $(A_1, +, \circ)$. Некоторую информацию о строении почтикольца $(A_1, +, \circ)$ можно извлечь из теорем 1, 3, 5, 6 и лемм 4 и 5 п. 4.3 гл. IV [3].

Обратимся теперь к случаям $\Lambda_0 \neq \varnothing$ и $\Lambda_1 \neq \varnothing$. Ввиду того что $I_0 \cap I_1 = \{0\}$, то m-кольцо К разлагается в подпрямое произведение m-колец A_0 и A_1. На самом деле это − прямое разложение. В самом деле, пусть $К \subseteq A_0 \times A_1$ − подпрямое вложение m-кольца К в прямое произведение m-колец $A_0 = К/I_0$, $A_1 = К/1$. Положим $a_0 = a\cdot a$, $a_1 = a - a\cdot a$. Естественный гомоморфизм m-кольца К на $К/M_\lambda$ обозначаем через ν_λ и для $i \in \{0, 1\}$ через $\pi_i : \to A_i$ − проекции прямого произведения $A_0 \times A_1$ на компоненту A_i. Пусть $a_1 \in A_1$. Для некоторого $a \in К$ имеем $\pi_1(a) = a_1$. Тогда с использованием условий а), б) и (5) получим $\pi_0(a - a\cdot a) = 0$, $\pi_1(a - a\cdot a) = \pi_1(a) - \pi_1(a\cdot a) = \pi_1(a) = a_1$. Отсюда следует, что $\{0\}\times A_1 \subsetneq К$. Далее, если $a_0 \in A_0$, то для некоторого $b \in К$ имеем $\pi_0(b) = a_0$ и согласно предыдущим вычислениям $b - (a_0, 0) = (\pi_0(b), \pi_1(b)) - (a_0, 0) = (\pi_0(b), 0) \in К$, поэтому $(a_0, 0) \in К$. Таким образом, $A_0 \times \{0\} \subsetneq К$ и $A_0 \times A_1 = К$. Теорема 2 доказана. ■

Замечание 1. Теорема 2 позволяет свести изучение строения флексибильных вполне полупростых m-колец к изучению обобщенных булевых решеток и флексибильных почтиколец с коммутативным сложением.

В связи с замечанием 1 и примером 1 приведем пример конечного почтиполя, не являющегося флексибильным почтикольцом.

Пример 2. Рассмотрим m-кольцо $(К, +, \cdot, \circ)$ с нулевым умножением такое, что пусть $(К, +, \circ)$ − правое почтиполе типа Диксона с параметрами $n = 2$ и $q = 5$. Тогда можно считать, что аддитивная группа $(К, +)$ совпадает с аддитивной группой поля F_{25}. Пусть α − первообразный элемент поля F_{25}. Суперпозиция “$\circ$” задается аналогично формуле (4): для $a, b \in К$

$$a\circ b = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a = 0 \vee b = 0; \\ a \cdot b, & \text{если} \quad b = \alpha^i, i \in 2\mathbb{Z}; \\ a^5 \cdot b, & \text{если} \quad b = \alpha^i, i \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

С помощью этой формулы можно показать, что в группе $(К^\#, \circ)$ порядки элементов α^5 и α^8 равны 8 и 3 соответственно. При этом $\alpha^5\circ\alpha^8 \neq \alpha^8\circ\alpha^5$. Если бы исходно m-кольцо было бы флексибильным, то согласно лемме 4 группа $(К^\#, \circ)$ была бы квазигамильтоновой и, значит, нильпотентной согласно теореме Ивасавы [31], что противоречит приведенному неравенству. ■

Следствие 5. *Не всякое $\mathcal{E}$-центральное периодическое вполне регулярное m-кольцо флексибильно.*

С помощью теоремы 2 так же, как и следствие 4.3.2 гл. IV [3], доказывается следствие 1.

Доказательство теоремы 3 начнем со следующих лемм.

Лемма 5. *Пусть* К − *флексибильное m-кольцо. Тогда* множество $\mathcal{N}(К)$ *является идеалом m-кольца* К, *причем выполняются равенства*

$$К\circ\mathcal{N}(К) = \mathcal{N}(К)\circ К = \{0\}.$$

Доказательство. Согласно лемме 1 m-кольцо К 0-коммутативно, откуда с учетом следствия 2.4.1 гл. IV [3] вытекает, что $\mathcal{N}(К) \trianglelefteq К$. Далее, пусть $a \in \mathcal{N}(К)$. Покажем, что $a^{[2]} = 0$. Действительно, так как $a \in \mathcal{N}(К)$, то $a^{[m]} = 0$ для некоторого натурального $m > 1$. Можно предположить, что m – индекс нильпотентности элемента a. Если $m > 2$, то из условия (3) следует, что $a^{[2]} = a^{[n]}$ для некоторого $n > 3$. Отсюда следует, что если в двоичном разложении числа n заменить основание 2 на n, то получим число $n_1 > n$ и при этом $a^{[2]} = a^{[n_1]}$. Продолжая этот процесс, придем к такому показателю n_i, $i \in \mathbb{N}$, что $n_i > m$ и $a^{[2]} = a^{[n_i]}$. Значит, $a^{[2]} = 0$. Теперь если $a \in \mathcal{N}(К)$ и $x \in К$, то по свойству (3) будет

$a\circ x = x^{[m]}\circ a^{[n]}$ для чисел m и n, больших 1. В силу равенства $a^{[2]} = 0$ отсюда получаем, что $a\circ x = 0$, аналогично $x\circ a = 0$. ■

Лемма 6. *Пусть* К *– флексибильное* m*-кольцо. Тогда*

$$К = \mathcal{N}(К) + \mathcal{G}(К). \qquad (6)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 m-кольцо К 0-коммутативно и периодично, откуда с использованием леммы 4.3.6 гл. IV [3] получим равенство (6). ■

Лемма 7. *Пусть* К *− флексибильное* m*-кольцо. Тогда* $\mathcal{N}$(К) *и* $\mathcal{G}$(К) *имеют нулевое пересечение.*

Доказательство. Если $x\in\mathcal{N}(К) \cap \mathcal{G}(К)$, то для некоторого $n > 1$ будет $x = x^{[n]}$ и согласно лемме 5 $x = 0$. ■

Лемма 8. *Пусть* К *− флексибильное* m*-кольцо. Тогда множество* $\mathcal{G}$(К) *является под-*m*-кольцом* m*-кольца* К.

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{G}(К) \neq \{0\}$. Зафиксируем два ненулевых элемента x, $y\in\mathcal{G}(К)$. Так как это – циклические элементы, то для некоторых идемпотентов e_x, $e_y\in\mathcal{E}(К)^{\#}$ будут выполняться равенства

$$x = x\circ e_x = e_x\circ x \wedge y = y\circ e_y = e_y\circ y. \qquad (7)$$

Согласно (2) для некоторых натуральных чисел m и n имеем $(x\circ y)\circ(e_x\circ e_y) = (e_x\circ e_y)^{[m]}\circ(x\circ y)^{[n]}$. Отсюда с использованием (7) и $\mathcal{E}$-центральности К получим

$$x\circ y = x\circ e_x\circ y\circ e_y = (x\circ y)\circ(e_x\circ e_y) = (e_x\circ e_y)^{[m]}\circ(x\circ y)^{[n]} = (x\circ e_x\circ y\circ e_y)^{[n]} = (x\circ y)^{[n]}.$$

Значит, $x\circ y\in\mathcal{G}(К)$.

Далее, согласно лемме 5 $\mathcal{N}(К) \trianglelefteq К$. Обозначим через ν естественный гомоморфизм m-кольца К на фактор-m-кольцо К/$\mathcal{N}$(К). Последнее является флексибильным вполне полупростым m-кольцом и по лемме 2 должно быть J-m-кольцом. Поэтому для некоторых натуральных чисел m и n, больших 1, будут выполняться равенства: $(\nu(x\cdot y))^{[m]} = \nu(x\cdot y)$, $(\nu(x - y))^{[m]} = \nu(x - y)$. Отсюда вытекает, что для некоторых a, $b\in\mathcal{N}(К)$ получим

$$(x\cdot y)^{[m]} - x\cdot y = a \wedge (x - y)^{[m]} - (x - y) = b. \qquad (8)$$

Обозначим через e идемпотент $e_x\vee e_y$. Используя то, что $x\circ e = x\circ e_x\circ e = x\circ e_x = x$ и $y\circ e = y$, с учетом леммы 5 и (8) выводим: $0 = a\circ e = ((x\cdot y)^{[m]} - x\cdot y)\circ e = ((x\cdot y)^{[m]}\circ e - (x\cdot y))\circ e = ((x\circ e)\cdot(y\circ e))^{[m]}\circ e - (x\circ e)\cdot(y\circ e) = (x\cdot y)^{[m]} - x\cdot y$. Значит, $(x\cdot y)^{[m]} = x\cdot y$ и $x\cdot y\in\mathcal{G}(К)$. Аналогично $(x - y)^{[m]} = (x - y)\in\mathcal{G}(К)$. Таким образом, $\mathcal{G}$(К) есть под-m-кольцо m-кольца К. ■

Лемма 9. *Пусть* К *− флексибильное* m*-кольцо. Тогда* $\mathcal{G}$(К) *является идеалом почтикольца* (К, +, ○).

Доказательство. Из леммы 8 следует, что $\mathcal{G}$(К) замкнуто относительно сложения и суперпозиции. Теперь предположим, что $x\in\mathcal{G}(К)$ и $u\in К$, и покажем, что $x\circ u\in\mathcal{G}(К)$. Согласно лемме 6 $u = a + y$ для некоторых $a\in\mathcal{N}(К)$ и $y\in\mathcal{G}(К)$. Благодаря (2) и периодичности $\mathcal{G}$(К) найдутся для некоторых натуральных m и n, больших 1, такие, что $x\circ(a + y) = (a + y)^{[m]}\circ x^{[n]}$. Теперь с применением (5) и леммы 9 выводим

$$\begin{aligned} x\circ u = x\circ(a + y) = (a + y)^{[m]}\circ x^{[n]} = (a + y)^{[m-1]}\circ(a + y)\circ x^{[n]} = (a + y)^{[m-1]}\circ(a\circ x^{[n]} + y\circ x^{[n]}) = \\ = (a + y)^{[m-1]}\circ y\circ x^{[n]} = \ldots = y^{[m]}\circ x^{[n]}\in\mathcal{G}(К). \end{aligned} \qquad (9)$$

Если еще $v\in К$, то с использованием (5), (9) и леммы 8 получим $u\circ(v + x) - u\circ v = (a + y)\circ(v + x) - (a + y)\circ v = a\circ(v + x) + y\circ(v + x) - a\circ v - y\circ v = y\circ(v + x) - y\circ v\in\mathcal{G}(К)$. Значит, $\mathcal{G}$(К) есть идеал почтикольца (К, +, ○). ■

Этим завершается доказательство теоремы 3. Приводимые в ней соотношения и то, что К – полупрямое произведение $\mathcal{N}$(К) на $\mathcal{G}$(К), является содержанием лемм 5–8, а последнее утверждение – это лемма 9. ■

Замечание 2. Из приведенных утверждений следует, что в наиболее общей ситуации структура флексибильного m-кольца К во многом определяется структурой коммутативного ассоциативного кольца ($\mathcal{N}$(К), +, ·) и флексибильного вполне полупростого m-кольца ($\mathcal{G}$(К), +, ·, ○), структура которого, в свою очередь, определяется обобщенным булевым кольцом (A_0, +, ○) и периодическим вполне регулярным $\mathcal{E}$-центральным почтикольцом (A_1, +, ○), удовлетворяющим условию (2), *o*-полугруппа которого разлагается в полурешетку периодических квазигамильтоновых групп. Описание последних было получено в работах [26, 31–33], формулировку основной теоремы можно найти в [25] (теорема 18). В частности, такая группа метабелева, имеет модулярную решетку подгрупп и в случае конечности нильпотентна. ■

1. Ширяев В.М. Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Мн., 2004.
2. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 1 [Электронный ресурс]. Мн., 2009. С. 280. Деп. в БелИСА 27.10.09 № 200934.
3. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 2 [Электронный ресурс]. Мн., 2009. С. 273. Деп. в БелИСА 27.10.09 № 200935.
4. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. и др. Общая алгебра: в 2 т. М., 1991. Т. 2.
5. Ляпин Е.С. Полугруппы. М., 1960.
6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М., 1972.
7. Холл М. Теория групп. М., 1962.
8. Herstein I.N. // Duke Math. J. 1954. Vol. 21. № 1. P. 45.
9. Pilz G. Near-rings. 2nd ed. Amsterdam, 1983.
10. Clay J.R., Lawver D.A.H. Canad. Math. Bull. 1969. Vol. 12. № 3. P. 265.
11. Плоткин Б.И. // ДАН СССР. 1963. Т. 149. № 5. С. 1037.
12. Полин С.В. // Мат. сб. 1971. Т. 84 (126). № 2. С. 255.
13. Хион Я.В. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1965. Т. 14. С. 3.
14. Adler I.H.E. // Duke Math. J. 1952. Vol. 29. № 4. P. 607.
15. Menger I.N. // Notre Dame Math. Lectures. 1944. Vol. 4. P. 209.
16. Vasantha K.W.B. // Bul. Inst. polytehn. Iasi. Sec. 1. 1996. Vol. 42. № 1-2. P. 1.
17. Abujabal H.A.S., Obaid M.A., Khan M.A. // Proyecciones Universidad Catolica del Norte Antafagasta – Chile. 2000. Vol. 19. № 2. P. 113.
18. Ashraf M. // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 1995. Vol. 53. № 1. P. 61.
19. Bell H.E. // Canad. J. Math. 1976. Vol. 28. № 5. P. 986.
20. Bell H.E., Ligh S. // Math. J. Okayama Univ. 1989. Vol. 31. № 1. P. 93.
21. Komatsu H., Tominaga H. // Ibid. P. 121.
22. Jacobson N. // Ann. of Math. Sem. 1945. Vol. 46. № 1. P. 695.
23. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984.
24. Zappa G. // Pont. Acad. Sci. Comment. 1944. Vol. 8. P. 443.
25. Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М., 1950.
26. Zappa G. // Pont. Acad. Sci. Acta. 1942. Vol. 6. P. 249.
27. Dickson E. // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gőttingen. Math.-phys. Rlasse. 1905. S. 358.
28. Ellers S., Karzel H. // Abhandl. Math. Seminar Hamburg. 1964. B. 27. S. 250.
29. Wählung H. Theorie der Fastkőrper. Essen, 1987.
30. Zassenhaus H. // Abhandl. Math. Seminar Hamburg. 1936. B. 11. S. 187.
31. Iwasawa K. // J. Univ. Tokyo. 1941. Vol. 2. № 3-4. P. 171.
32. Iwasawa K.O. // Jap. J. Math. 1943. Vol. 18. P. 709.
33. Zappa G. // Comment. math. Helv. 1945. Vol. 18. P. 42.

Поступила в редакцию 14.10.10.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.