Математика и информатика

УДК 512.542

П.А. ЖИЗНЕВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

A τ-closed n-multiply ω-composition formation generated by group G is called one-generated τ-closed n-multiply ω-composition formation and denote by $c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\, G,$ i. e., $c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\, G$ is the intersection of all τ-closed n-multiply ω-composition formations containing group G. In this paper we study properties of one-generated τ-closed n-multiply ω-composition formations. We proved that every one-generated τ-closed n-multiply ω-composition formation $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ has the number finite τ-closed n-multiply ω-composition subformations with $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-defect 1.

Все рассматриваемые группы конечны. Используется терминология, принятая в работах [1–3]. В теории формаций конечных групп важную роль играют так называемые однопорожденные формации того или иного вида, т. е. формации, порожденные одной группой. Формации такого типа исследовались многими авторами (см., например, [1, 2, 4, 5]). Нами были изучены свойства однопорожденных ненильпотентных ω-композиционных [6] и n-кратно ω-композиционных [7] формаций. Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению свойств однопорожденных формаций, в частности, установлена справедливость следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– однопорожденная* τ*-замкнутая n-кратно* ω*-композиционная формация,* $\mathfrak{H}$ *– непустая нильпотентная насыщенная формация и* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geq 1)$. *Тогда в* $\mathfrak{F}$ *содержится лишь конечное множество* τ*-замкнутых n-кратно* ω*-композиционных подформаций с* $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$*-дефектом* 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– однопорожденная* τ*-замкнутая n-кратно* ω*-композиционная формация,* $\mathfrak{H}$ *– непустая нильпотентная насыщенная формация и* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geq 1)$. *Тогда если* $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ *– решетка с дополнениями, то каждый элемент* $\mathfrak{M}$ *решетки* $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ *представим в виде* $\mathfrak{M} = \vee^{\tau}_{\omega_n}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I)$, *где* $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ *– набор всех минимальных* τ*-замкнутых n-кратно* ω*-композиционных не* $\mathfrak{H}$*-формаций, содержащихся в* $\mathfrak{M}$.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Тогда любую функцию вида $f : \omega \cap \{\omega'\} \rightarrow$ {формации групп} называют ω-композиционным спутником. Следуя [3], для произвольного ω-композиционного спутника f положим

$$CF_{\omega}(f) = \{G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^{p}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\mathrm{Com}^{+}(G)) \cap \omega\},$$

где $\mathrm{Com}^{+}(G)$ – множество всех абелевых композиционных факторов группы G, $R_{\omega}(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G, $C^{p}(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^{p}(G) = G$). Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f – ее ω-композиционный спутник. Всякую формацию считают 0-кратно ω-композиционной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Подгрупповым функтором [2] называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для всякого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что символом $c_{\omega_n}^{\tau}$ обозначается решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. ω-Композиционный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями, называют $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значным.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией или, иначе, $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-критической, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Символом $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначается такая подрешетка решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$, которая состоит из всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $c_{\omega_n}^{\tau} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Формацию $c_{\omega_n}^{\tau} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ называют τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $c_{\omega_n}^{\tau} \operatorname{form} \mathfrak{X} = c_{\omega_n}^{\tau} \operatorname{form} G$ называют однопорожденной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формацией.

Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки, таких, что $x \leq z$, выполняется $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Пусть L – решетка с нулем 0 и единицей 1. Говорят, что элемент b является дополнением элемента $a \in L$ в решетке L, если $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Решетка называется: решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение; решеткой с относительными дополнениями, если каждый ее интервал $[a, b]$ является решеткой с дополнениями. Атом решетки – это ее наименьший ненулевой элемент, т. е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G множество $\tau(G)$ содержится во множестве всех субнормальных подгрупп группы G.

Лемма 1 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ – непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geq 1)$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-дефект 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ – минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация, при этом: 1) всякая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная содержащаяся в $\mathfrak{H}$ подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})$; 2) всякая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная несодержащаяся в $\mathfrak{H}$ подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{K} \vee_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.*

Лемма 2 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ – непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $n \geq 1$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Лемма 3 [8]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая нильпотентная насыщенная формация, $\Omega = \{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ – некоторый набор минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций и $\mathfrak{M}$ – такая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geq 1)$. Тогда если $\mathfrak{K}$ – минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} (\vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}_i \mid i \in I)$, то $\mathfrak{K} \in \Omega$.*

Лемма 4 [2]. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым цоколем, $\mathfrak{M}$ – некоторая τ-замкнутая полуформация и $A \in l_n^{\tau} \operatorname{form} \mathfrak{M}$ $(n \geq 0)$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Лемма 5 [9]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– некоторая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}\mathfrak{X}$ *и* $\pi = \pi(\mathrm{Com}^{+}(\mathfrak{X}))$, *где* $n \geq 1$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет минимальный* $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный* ω*-композиционный спутник* f *и справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(G/C^{p}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, *для всех* $p \in \pi \cap \omega$*;*

3) $f(p) = \varnothing$, для всех $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ *и спутник* h $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значен, то* $f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1)$, *для всех* $p \in \pi \cap \omega$ *и* $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(A) = 1)$.

Используя замечание из [3, с. 796], нетрудно показать, что верна

Лемма 6. *Если* $\mathfrak{F}$ *– однопорожденная* τ*-замкнутая* n*-кратно* ω*-композиционная формация* ($n \geq 0$)*, то в* $\mathfrak{F}$ *имеется лишь конечное множество разрешимых* τ*-замкнутых* n*-кратно* ω*-композиционных подформаций.*

Лемма 7 [10]. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– непустая нильпотентная насыщенная формация. Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной* τ*-замкнутой* n*-кратно* ω*-композиционной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* ($n \geq 1$)*, когда* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}\, G$*, где* G *– такая монолитическая* τ*-минимальная не* $\mathfrak{H}$*-группа с нефраттиниевым цоколем* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, что либо* $\pi = \pi(\mathrm{Com}^{+}(P)) \cap \omega = \varnothing$*, либо* $\pi \neq \varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ *– группа простого порядка* $p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}^{+}(\mathfrak{H}))$*;*

2) $G = [P]Q$*, где* $P = C_G(P)$ *– абелева* p*-группа,* $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}^{+}(\mathfrak{H}))$ *и* $|Q| = q$*,* p *и* q *– различные простые числа.*

Лемма 8 [11]. *Пусть* G *– группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G *– разрешимая бипримарная группа;*

2) $G^{\mathfrak{N}}$ *является силовской* q*-подгруппой в* G*,* q *– простое число;*

3) $G/G^{\mathfrak{N}}$ *– циклическая* p*-группа,* p *– простое число;*

4) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ *– главный фактор группы* G*, причем если* $|G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = q^{b}$*, то* $q^{b} \equiv 1 \pmod{p}$ *и* b *есть показатель числа* q *по модулю* p*;*

5) если $P = \langle a \rangle$ *– силовская* p*-подгруппа из* G*, то* $a^{p} \in Z(G)$*;*

6) если $G^{\mathfrak{N}}$ *абелева, то* $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Лемма 9 [9]. *Для любого целого неотрицательного числа* n *решетка* $c^{\tau}_{\omega_n}$ *всех* τ*-замкнутых* n*-кратно* ω*-композиционных формаций модулярна.*

Лемма 10 [12, с. 27]. *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

Лемма 11 [12, с. 31]. *Любая модулярная решетка* M *с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Лемма 12 [13]. *Любая модулярная решетка* L *с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.*

Лемма 13 [12, с. 32]. *В решетке* L *конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент является объединением содержащихся в нем атомов.*

Лемма 14. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая* n*-кратно* ω*-композиционная формация,* $\mathfrak{H}$ *– непустая нильпотентная насыщенная формация и* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ ($n \geq 1$)*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{M}$ *– атом решетки* $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$*, когда* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$*, где* $\mathfrak{K}$ *– некоторая минимальная* τ*-замкнутая* n*-кратно* ω*-композиционная не* $\mathfrak{H}$*-подформация формации* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда длина решетки $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ равна 1. Значит, $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ – максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{M}$, содержащаяся в $\mathfrak{H}$. Применяя лемму 1, имеем $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ – некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Предположим противное, т. е. пусть найдется такая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация $\mathfrak{R}$, что $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$. Поскольку $\mathfrak{R} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то согласно лемме 2 в $\mathfrak{R}$ имеется минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{K}_1$. Тогда $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$. По лемме 3 $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ – атом решетки $\mathfrak{F} /^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым цоколем, $\mathfrak{M}$ – некоторая полуформация и $A \in c^{\tau}_{\omega_n}$ form $\mathfrak{M}$ ($n \geq 0$). Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 0$ утверждение леммы прямо вытекает из леммы 4. Пусть теперь $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна. Пусть A – такая монолитическая группа с неабелевым цоколем R, что $A \in c^{\tau}_{\omega_n}$ form $\mathfrak{M}$, и пусть f – минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $c^{\tau}_{\omega_n}$ form $\mathfrak{M}$. Тогда $R_{\omega}(A) = 1$ и согласно лемме 5 имеем

$$A \cong A / R_{\omega}(A) \in f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \text{ form } (G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \text{ form } \mathfrak{M}.$$

Следовательно, по предположению индукции $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Напомним, что частично упорядоченное множество P имеет длину n, где $n \geq 1$, если в P существует цепь длины n и все цепи в P имеют длину $\leq n$. Длина конечной цепи C равна $|C| - 1$. Длину решетки $\mathfrak{F} /^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ (конечную или бесконечную) называют $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}$ form G для некоторой группы $G \notin \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 6 формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций. Тогда в $\mathfrak{F}$ содержится конечное множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций, содержащихся в $\mathfrak{H}$.

Согласно лемме 7 каждая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{K} = c^{\tau}_{\omega_n}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(\mathrm{Com}^{+}(P))\cap\omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) K – группа простого порядка $p\in\omega \setminus \pi(\mathrm{Com}^{+}(\mathfrak{H}))$;

2) $K = [P]Q$, где $P = C_K(P)$ – абелева p-группа, $p\in\omega\cap\pi(\mathrm{Com}^{+}(\mathfrak{H}))$ и $|Q| = q$, p и q – различные простые числа.

Пусть f – минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда из леммы 5 имеем

$$f(a)=\begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^{p}(G)), \text{ если } a=p \in \pi(\mathrm{Com}^{+}(G)) \cap \omega; \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G)), \text{ если } a=\omega'; \\ \varnothing, \quad \text{ если } a=q \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}^{+}(G)). \end{cases}$$

Пусть $\pi = \varnothing$. Тогда $R_{\omega}(K) = 1$. Следовательно,

$$K \cong K / R_{\omega}(K) \in f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G / R_{\omega}(G)) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathrm{H}(G / R_{\omega}(G))).$$

Если P – неабелева подгруппа группы K, то по лемме 15 получаем, что K изоморфна некоторому гомоморфному образу группы $G/R_{\omega}(G)$. Поскольку G – конечная группа, то $G/R_{\omega}(G)$ также конечна. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi = \varnothing$ и P – неабелева группа.

Пусть $\pi = \varnothing$ и P – абелева группа. Так как $K/P = K/K^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$, то K – разрешимая группа. Значит, по лемме 6 в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi = \varnothing$ и P – абелева группа. Следовательно, в $\mathfrak{F}$

имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c_{\omega_n}^{\tau}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что выполняется условие $\pi = \varnothing$.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 1). Тогда группа K, очевидно, разрешима. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c_{\omega_n}^{\tau}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 1).

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 2). Тогда ввиду леммы 8 снова получаем, что K – разрешима. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c_{\omega_n}^{\tau}$ form K, где K – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 2).

Таким образом, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ – произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация из $\mathfrak{F}$ с $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-дефектом 1. По лемме 1 имеем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ – минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Теперь поскольку формация $\mathfrak{M}$ – разрешима, то из доказанного выше следует, что в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций с $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-дефектом 1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 9 решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций модулярна. Тогда по лемме 10 решетка $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ также модулярна, как подрешетка модулярной решетки. В силу леммы 11 решетка $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является модулярной решеткой с относительными дополнениями. Используя теорему 1, лемму 1 и лемму 14, получаем, что решетка $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ имеет конечное число атомов. Значит, по лемме 12 эта решетка имеет конечную длину. Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ – множество всех атомов решетки $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Тогда согласно лемме 14 для каждого $i \in I$ имеем $\mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}_i$, где $\mathfrak{K}_i$ – некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Используя лемму 13, получаем, что каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F} /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде $\mathfrak{M} = \vee_{\omega_n}^{\tau} ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ – набор всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

1. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
2. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
3. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 6. С. 783.
4. Сафонов В.Г. // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 1. С. 185.
5. Шабалина И.П. // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2006. № 5 (38). С. 78.
6. Жизневский П.А. // Там же. 2008. № 2 (47). С. 84.
7. Жизневский П.А. К теории кратно частично композиционных формаций конечных групп. Гомель, 2008. 35 с. (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; № 30).
8. Жизневский П.А. О τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формациях с булевой подрешеткой / Гомель, 2010. 26 с. (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; № 3).
9. Жизневский П.А. // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2010. № 1 (58). С. 185.
10. Жизневский П.А., Сафонов В.Г. // Изв. НАН Беларуси. 2010. № 3. С. 44.
11. Шмидт О.Ю. // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366.
12. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984.
13. Жевнова Н.Г. ω-Локальные формации с дополняемыми подформациями: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: Д 02.12.01 / Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. Гомель, 1997.

Поступила в редакцию 18.01.11.

Павел Александрович Жизневский – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, начальник управления науки и инновационной деятельности Министерства образования Республики Беларусь В.Г. Сафонов.