Доклады Академии наук БССР

1988 Том XXXII № 2

УДК 519.6+532.546

В. В. ВИДЯКИН, В. М. ЕНТОВ, В. Б. ТАРАНЧУК

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ВЫТЕСНЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ВЯЗКОЙ

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

На основе теории потенциала построено и анализируется решение задачи определения предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластической жидкости при вытеснении ее вязкой из пористой среды.

Рассматривается изотермическая фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемом плоском горизонтальном пласте, когда в области фильтрации имеются источник и сток равной интенсивности Q, расположенные на расстоянии $2a$ друг от друга. Предполагается, что в результате длительного вытеснения вязкопластической жидкости вязкой образуется целик, занимающий внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ, внутри которого расположены источник и сток. Эта механическая задача для случая фильтрации в однородной пористой среде приводит к следующей краевой задаче для давления p (см., например, [1]):

$$\Delta p = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial s}\right| = G \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

где G — предельный градиент давления вязкопластической жидкости, условия на контуре сформулированы для нормальной и касательной производных.

Рассматриваемая задача (1), (2) может быть решена методами теории аналитических функций [2, 3]. Приведем другой способ решения. По аналогии с [4, 5] искомое решение ищется в виде суперпозиции потенциала пары источник — сток $\varphi(x, y)$ и потенциала простого слоя с плотностью $\nu(\sigma)$, сосредоточенного на контуре Γ:

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_\Gamma \nu(\sigma) \ln R^{-1} d\sigma,$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{D}{4} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma,$$

σ — дуговая абсцисса точки (ξ, η); k — проницаемость пласта; μ — вязкость вытесняющей ньютоновской жидкости; $D = Q\mu(\pi k)^{-1}$.

Условия (2) приводят к следующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания плотности $\nu(x, y)$ и формы контура Г:

$$(\beta - 2\pi)\,\nu + \int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\ln R^{-1}\,d\sigma + \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\,\frac{\partial}{\partial s}\,\ln R^{-1}\,d\sigma + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right| = G,$$

где β — угол между касательными в угловых точках контура; для остальных точек $\beta=\pi$. Откуда, переходя к полярным координатам r, θ, считая контур заданным уравнением $r=g(\theta)$, имеем:

$$(\beta - 2\pi)\,\nu + \int\limits_0^{2\pi} \nu(\alpha)\,N(\alpha,\ \theta)\,d\alpha = \Phi(\theta); \tag{3}$$

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} \nu(\alpha)\,K(\alpha,\ \theta)\,d\alpha + \Psi(\theta)\right| = G\,[g^2(\theta) + g'^2(\theta)]^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$N(\alpha,\ \theta) = [g^2(\theta) - g(\theta)\,c_1(\alpha,\ \theta) - g'(\theta)\,c_2(\alpha,\ \theta)]\,\varkappa;$$

$$K(\alpha,\ \theta) = [g'(\theta)\,g(\theta) - g'(\theta)\,c_1(\alpha,\ \theta) + g(\theta)\,c_2(\alpha,\ \theta)]\,\varkappa;$$

$$c_1(\alpha,\ \theta) = g(\alpha)\cos(\theta - \alpha), \quad c_2(\alpha,\ \theta) = c_1(\alpha,\ \theta)\,\mathrm{tg}(\theta - \alpha);$$

$$\varkappa = [g^2(\theta) - 2g(\theta)\,c_1(\alpha,\ \theta) + g^2(\alpha)]^{-1};$$

$$\Phi(\theta) = -c(\theta)\,[g(\theta)\,c_3(\theta) + g'(\theta)\,c_4(\theta)];$$

$$c_3(\theta) = (a^2 - g^2(\theta))\cos\theta, \quad c_4(\theta) = (a^2 + g^2(\theta))\sin\theta;$$

$$\Psi(\theta) = c(\theta)\,[g'(\theta)\,c_3(\theta) - g(\theta)\,c_4(\theta)];$$

$$c(\theta) = Da\,[a^4 - 2a^2g^2(\theta)\cos 2\theta + g^4(\theta)]^{-1}.$$

Система (3), (4) может быть решена численно, путем сведения ее к аппроксимирующей, при получении которой производные и интегралы заменяются соответственно конечными разностями и суммами [6]. Характер особенностей ядер $N(\alpha, \theta)$, $K(\alpha, \theta)$ исследован в [4]. Аппроксимирующая нелинейная система алгебраических уравнений может быть решена, например, каким-либо итерационным методом. При этом, как показали проведенные расчеты, требуется производить большой объем вычислений, сходимость существенно зависит от начального приближения.

Для преодоления названных трудностей решение системы (3), (4) ищется в виде

$$\delta(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(\theta)\,\varepsilon^i, \quad \rho(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(\theta)\,\varepsilon^i, \tag{5}$$

где $\delta(\theta) = \nu(\theta)/G$, $\rho(\theta) = g(\theta)\sqrt{G\,(aD)^{-1}}$, $\varepsilon = aGD^{-1}$, δ, g, ε — безразмерные, ε считается малым. Тогда имеем следующую систему равенств:

$$(\beta - 2\pi)\,\delta_n(\theta) + \int\limits_0^{2\pi} \sum_{i,j}^{i+j=n} \delta_i(\alpha)\,N_j(\alpha,\ \theta)\,d\alpha = \Phi_n(\theta); \tag{6}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sum_{i,j}^{i+j=n} \delta_i(\alpha)\,K_j(\alpha,\ \theta)\,d\alpha = \Psi_n(\theta), \tag{7}$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$; N_k, K_k, Φ_k, Ψ_k — коэффициенты разложений в ряд по степеням ε соответствующих членов системы.

Заметим, что при $n=0$ система (6), (7) допускает элементарное решение, соответствующее диполю в начале координат, которое может быть получено методом Кирхгофа. В этом приближении граница целика — эпициклоида [2].

Для определения $\delta_0(\theta)$ при известном $\rho_0(\theta)$ используется одно из уравнений системы, в которой ядра $N_0(\alpha, \theta)$, $K_0(\alpha, \theta)$ совпадают с $N(\alpha, \theta)$, $K(\alpha, \theta)$, если положить $\rho=\rho_0$.

Проводя необходимые выкладки, можно записать соответствующие системы для $n=1, 2, 3...$, для каждого из которых из (6), (7) получается система линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений. Решение этих систем может быть сведено к расчету аппроксимирующей линейной системы алгебраических уравнений.

Для оценки эффективности описанных методов были получены численные решения систем (3), (4) и (6), (7). Изучались сходимость и точность приближенных решений, которые сопоставлялись с точным аналитическим решением [2]. Сравнения решений показывают, что для малых ε достаточная точность достигается, даже если ограничиться только двумя первыми членами ряда (5). Затраты машинного времени на получение таких решений оказываются на порядок меньше, чем для расчета решений системы (3), (4), если соответствующая нелинейная система решается итерационным методом Стеффенсена.

Заметим, что на основе описанного метода могут быть получены решения задач с более сложной геометрией, в том числе и трехмерных.

Summary

A solution of the problem of a limiting configuration of the stagnation region during displacement of viscoplastic liquid by water is considered using the methods of the theory of potential.

Литература

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., 1975. 200 с. 2. Алишаев М. Г. // Теория и практика добычи нефти. М., 1968. С. 202—211. 3. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с предельным градиентом. Казань, 1978. 141 с. 4. Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкости в пористой среде. М., 1980. 264 с. 5. Ентов В. М., Малахова Т. А., Панков В. Н., Панько С. В. // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 113—121. 6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962. 708 с.

НИИ прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко, Институт проблем механики АН СССР

Поступило 19.06.87

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК БССР

АВТОРСКИЙ ОТТИСК

32-Й ГОД ИЗДАНИЯ
Том XXII, № 2

1988