УДК 517.986.24+517.986.225

Б. К. Квасневски, А. В. Лебедев

Обратимые расширения необратимых динамических систем: C^*-метод

Описана конструкция обратимого расширения необратимых динамических систем на базе подсчета пространств максимальных идеалов порожденных ими C^*-алгебр и соответствующих обратимых расширений эндоморфизмов. Показаны связи возникающих объектов с динамическими системами типа подковы Смейла и др.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение. Расширения C^*-алгебр частичными изометриями, расширения динамических систем и алгебры коэффициентов

Проблемы, исследованию которых посвящена настоящая статья, возникают в целом ряде разделов анализа, среди которых теория C^*-алгебр, ассоциированных с автоморфизмами и эндоморфизмами, в частности, теория скрещенных произведений, теория динамических систем и их обратных (проективных) пределов, спектральный анализ операторов взвешенного сдвига и трансфер-операторов.

Для пояснения мотивировки задачи мы начнем с рассмотрения модельных простых примеров, иллюстрирующих как саму постановку задачи, так и возникающие при ее анализе C^*-алгебраические и динамические объекты.

1.1. Расширения C^*-алгебр частичными изометриями. Продолжения эндоморфизмов до автоморфизмов.

Пример 1.1 (тёплицева алгебра). Напомним конструкцию классической тёплицевой алгебры. Пусть $H = l^2(\mathbb{N})$, и пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ – C^*-алгебра, состоящая из операторов умножения на ограниченные сходящиеся последовательности

$$a = (a(k)) \in l^\infty(\mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to+\infty} a(k) = a(+\infty).$$

Зададим изометрический оператор $U \in L(H)$ (односторонний сдвиг) формулой

$$(Uh)(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ h(k-1), & k > 0, \end{cases} \qquad h \in H.$$

Тёплицева алгебра – это C^*-алгебра $C^*(\mathscr{A}, U)$, порожденная алгеброй $\mathscr{A}$ и оператором U.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Польши (грант № 201382634).

Очевидные выкладки показывают, что отображения

$$\mathscr{A} \ni a \mapsto \delta(a) = UaU^*,$$
$$\mathscr{A} \ni a \mapsto \delta_*(a) = U^*aU$$

являются эндоморфизмами $\mathscr{A}$:

$$\delta(a)(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ a(k-1), & k > 0, \end{cases} \tag{1}$$
$$\delta_*(a)(k) = a(k+1), \qquad a(\,\cdot\,) \in \mathscr{A}.$$

Тёплицева алгебра является классическим объектом анализа, имеющим многочисленные приложения. К ее “недостаткам” можно отнести то, что по своей природе она ассоциирована с эндоморфизмом δ, а не с автоморфизмом. Можно ли избавиться от этого “недостатка”? Следующий пример показывает, как это можно просто сделать.

Пример 1.2 (расширенная тёплицева алгебра). Пусть $H = l^2(\mathbb{Z})$, и пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ – C^*-алгебра, состоящая из операторов умножения на ограниченные последовательности, равные нулю на отрицательной части $\mathbb{Z}$ и имеющие пределы в $+\infty$:

$$a = (a(k)) \in l^\infty(\mathbb{Z}), \qquad \forall_{k<0}\, a(k) = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} a(k) = a(+\infty).$$

Ясно, что эта алгебра $\mathscr{A}$ изоморфна как C^*-алгебра алгебре $\mathscr{A}$, рассмотренной в предыдущем примере.

Зададим унитарный оператор $U \in L(H)$ (двусторонний сдвиг) формулой

$$(Uh)(k) = h(k-1), \qquad h \in H.$$

Заметим, что в этом случае отображение $\mathscr{A} \ni a \mapsto \delta(a) = UaU^*$ является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$:

$$\delta(a)(k) = \begin{cases} 0, & k \leqslant 0, \\ a(k-1), & k > 0. \end{cases}$$

Однако отображение $\mathscr{A} \ni a \mapsto \delta_*(a) = U^*aU$ теперь не является эндоморфизмом $\mathscr{A}$, потому что $U^*\mathscr{A}U \nsubseteq \mathscr{A}$.

Рассмотрим алгебру $\mathscr{B} \subset L(H)$, состоящую из операторов умножения на ограниченные последовательности, имеющие пределы в $\pm\infty$:

$$b = (b(k)) \in l^\infty(\mathbb{Z}), \qquad \lim_{k\to\pm\infty} b(k) = b(\pm\infty).$$

Легко видеть, что

$$C^*(\mathscr{A}, U) = C^*(\mathscr{B}, U).$$

Более того, отображения $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ и $\delta_*(\,\cdot\,) = U_*(\,\cdot\,)U$ теперь являются автоморфизмами алгебры $\mathscr{B}$:

$$\delta(b)(k) = b(k-1), \qquad \delta_*(b)(k) = (k+1). \tag{2}$$

Алгебру $C^*(\mathscr{B}, U)$ мы будем называть *расширенной тёплицевой алгеброй.*

Хорошо известно, что
$$C^*(\mathscr{B},U)\cong\mathscr{B}\times_\delta\mathbb{Z},$$
где справа стоит скрещенное произведение алгебры $\mathscr{B}$ на группу $\mathbb{Z}$, действующую на алгебре $\mathscr{B}$ автоморфизмами δ^n, $n\in\mathbb{Z}$. Элементы скрещенного произведения при этом представляются формальными рядами с коэффициентами из алгебры $\mathscr{B}$.

В этом примере алгебру $\mathscr{B}$ естественно рассматривать как некоторое расширение алгебры $\mathscr{A}$, а алгебру $C^*(\mathscr{B},U)$ – как расширение тёплицевой алгебры $C^*(\mathscr{A},U)$ из примера 1.1, при этом эндоморфизм $\delta\colon\mathscr{A}\to\mathscr{A}$, описанный в примере 1.1 формулой (1), продолжается до автоморфизма $\delta\colon\mathscr{B}\to\mathscr{B}$, описанного в данном примере формулой (2).

Итак, расширяя тёплицеву алгебру (ассоциированную с эндоморфизмом), мы пришли к конструкции скрещенного произведения, ассоциированного с автоморфизмом.

Важность структур, подобных тёплицевым алгебрам и скрещенным произведениям, в анализе хорошо известна.

Отталкиваясь от приведенного примера, мы естественным образом приходим к следующей проблеме: можно ли осуществить конструкцию типа описанной в данных примерах в общей ситуации, т.е. можно ли найти общую конструкцию расширения $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ такую, что продолжение заданного эндоморфизма $\delta\colon\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$ уже будет автоморфизмом? В настоящей статье мы предложим полное решение этого вопроса в случае коммутативной алгебры $\mathscr{A}$.

В действительности поставленный выше вопрос тесно связан с проблемой построения обратимых расширений необратимых динамических систем. Чтобы проиллюстрировать эту связь, мы рассмотрим приведенные выше примеры с топологическо-динамической точки зрения.

1.2. Обратимые расширения необратимых динамических систем.

Пример 1.3 (динамическая интерпретация примера 1.2). Из технических соображений для удобства изложения мы наряду с объектами примера 1.2 введем в рассмотрение C^*-алгебру $\overline{\mathscr{A}}:=C^*(\mathscr{A},1)$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$ из примера 1.2 и единичным оператором 1. Ясно, что алгебра $\overline{\mathscr{A}}$ – это алгебра операторов $a\in\mathscr{B}$ умножения на последовательности, являющиеся константами для $n<0$. В сути наблюдений, сделанных в примере 1.2, при этом ничего не меняется, так как $C^*(\overline{\mathscr{A}},U)=C^*(\mathscr{B},U)$ и алгебра $\mathscr{B}$ является расширением алгебры $\overline{\mathscr{A}}$, причем отображение $\delta(\,\cdot\,)=U(\,\cdot\,)U^*$ является эндоморфизмом алгебры $\overline{\mathscr{A}}$ и $U^*\overline{\mathscr{A}}U\nsubseteq\mathscr{A}$.

Заметим, что
$$\overline{\mathscr{A}}\cong C(\overline{\mathbb{N}}),\qquad \mathscr{B}\cong C(\overline{\mathbb{Z}}),$$
где $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Зададим отображение $\alpha\colon\overline{\mathbb{N}}\to\overline{\mathbb{N}}$ формулами
$$\alpha(k)=k-1,\quad k>0,\qquad \alpha(0)=-\infty,\qquad \alpha(\pm\infty)=\pm\infty,$$
и отображение (гомеоморфизм) $\widetilde{\alpha}\colon\overline{\mathbb{Z}}\to\overline{\mathbb{Z}}$ формулами
$$\widetilde{\alpha}(k)=k-1,\quad k\in\mathbb{Z},\qquad \alpha(\pm\infty)=\pm\infty.$$

Отображение α определяет эндоморфизм δ на алгебре $\overline{\mathscr{A}}$:

$$\delta(a) = a \circ \alpha, \qquad a \in \overline{\mathscr{A}},$$

а отображение $\widetilde{\alpha}$ определяет автоморфизм δ (продолжение упомянутого эндоморфизма) на алгебре $\mathscr{B}$:

$$\delta(b) = b \circ \widetilde{\alpha}, \qquad b \in \mathscr{B}.$$

Зададим еще одно отображение $\Psi\colon \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{N}}$ формулами

$$\Psi(n) = n, \quad n \geqslant 0, \qquad \Psi(n) = -\infty, \quad n < 0, \qquad \Psi(\pm\infty) = \pm\infty.$$

Это отображение задает полусопряженность между динамическими системами $(\overline{\mathbb{Z}}, \widetilde{\alpha})$ и $(\overline{\mathbb{N}}, \alpha)$ в том смысле, что $\alpha(\Psi(x)) = \Psi(\widetilde{\alpha}(x))$, $x \in \overline{\mathbb{Z}}$, и так как Ψ является сюръекцией, то динамическую систему $(\overline{\mathbb{Z}}, \widetilde{\alpha})$ естественно считать обратимым расширением необратимой динамической системы $(\overline{\mathbb{N}}, \alpha)$.

Итак, продолжению эндоморфизма δ с алгебры $\overline{\mathscr{A}}$ до автоморфизма алгебры $\mathscr{B} \supset \overline{\mathscr{A}}$ отвечает расширение необратимой динамической системы $(\overline{\mathbb{N}}, \alpha)$ до обратимой динамической системы $(\overline{\mathbb{Z}}, \widetilde{\alpha})$.

Замечание 1.4. По поводу отображения Ψ, может быть, имеет смысл сразу же отметить следующее его существенное свойство. Отождествляя множества $\overline{\mathbb{N}}$ и $\overline{\mathbb{Z}}$ с множествами мультипликативных функционалов на алгебрах $\overline{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B}$ соответственно, заметим, что множество $\Gamma := \{-\infty,\, n < 0\} = \Psi^{-1}(-\infty) \subset \overline{\mathbb{Z}}$ совпадает с множеством мультипликативных функционалов на $\mathscr{B}$, являющихся продолжением мультипликативного функционала $-\infty \in \overline{\mathbb{N}}$ на $\mathscr{A}$ (ср. с общей ситуацией, описанной далее в п. 2.2 и в § 4 при определении подобного отображения формулой (68)).

Как показано ниже в теореме 2.2, связь между эндоморфизмами алгебр и динамическими системами имеет общий характер, поэтому рассмотренный пример и приведенное выше его C^*-алгебраическое обсуждение приводят к следующему вопросу: какова общая конструкция обратимого расширения необратимой динамической системы и как такая конструкция связана с конструкцией расширения C^*-алгебры и продолжения эндоморфизма до автоморфизма? Ответ на этот вопрос также будет дан в настоящей статье.

На самом деле все поднятые выше вопросы и описанные объекты стыкуются в конструкции так называемой алгебры коэффициентов. Перейдем к ее обсуждению.

1.3. Построение алгебр коэффициентов. Понятие алгебры коэффициентов было введено в статье [1] в связи с исследованием расширений C^*-алгебр частичными изометриями. Конкретнее, в [1] авторы исследовали следующий объект. Пусть H – гильбертово пространство и $\mathscr{A} \subset L(H)$ – некоторая *-алгебра, содержащая единицу 1 алгебры $L(H)$. Статья была посвящена описанию C^*-расширений алгебры $\mathscr{A}$, ассоциированных с отображениями

$$\delta(x) = UxU^*, \qquad \delta_*(x) = U^*xU, \qquad x \in L(H), \tag{3}$$

где $U \in L(H)$, $U \neq 0$. Ясно, что δ и δ_* являются линейными непрерывными преобразованиями $L(H)$ ($\|\delta\| = \|\delta_*\| = \|U^2\|$) и $\delta(x^*) = \delta(x)^*$, $\delta_*(x^*) = \delta_*(x)^*$.

При использовании степеней δ^k и δ_*^k, $k=0,1,2,\dots$, мы для удобства полагаем $\delta^0(x)=\delta_*^0(x)=x$.

Заметим, что если $\delta\colon \mathscr{A}\to L(H)$ является морфизмом, то

$$UU^*=\delta(1)=\delta(1^2)=\delta^2(1)=(UU^*)^2$$

и, следовательно, U является частичной изометрией.

В работе [1] авторы изучали C^*-алгебру $C^*(\mathscr{A},U)$, порожденную $\mathscr{A}$ и U, предполагая дополнительно, что $\mathscr{A}$ является *алгеброй коэффициентов* алгебры $C^*(\mathscr{A},U)$; под этим они подразумевали, что $\mathscr{A}$ обладает следующими тремя свойствами:

$$\mathscr{A}\ni a\to\delta(a)=UaU^*\in\mathscr{A}, \tag{4}$$

$$\mathscr{A}\ni a\to\delta_*(a)=U^*aU\in\mathscr{A}, \tag{5}$$

$$Ua=\delta(a)U,\qquad a\in\mathscr{A}. \tag{6}$$

Как показано в [1], алгебры, обладающие свойствами (4)–(6), действительно играют роль "коэффициентов" $C^*(\mathscr{A},U)$, а именно, в [1; предложение 2.4] доказано, что

если *-алгебра $\mathscr{A}$ и U удовлетворяют условиям (4)–(6), *то векторное пространство, состоящее из конечных сумм*

$$x=U^*a_{\overline{N}}+\dots+U^*a_{\overline{1}}+a_0+a_1U+\dots+a_NU^N, \tag{7}$$

где a_k, $a_{\overline{k}}\in\mathscr{A}$ и $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, является всюду плотной *-подалгеброй C^*-алгебры $C^*(\mathscr{A},U)$.

Полезно заметить, что свойство (6) может быть также записано в иной эквивалентной форме, о чем говорит следующее

Предложение 1.5 (см. [1; предложение 2.2]). *Пусть $\mathscr{A}$ является C^*-подалгеброй алгебры $L(H)$, $1\in\mathscr{A}$ и $U\in L(H)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $Ua=\delta(a)U$, $a\in\mathscr{A}$;

(ii) *U является частичной изометрией и*

$$U^*U\in\mathscr{A}', \tag{8}$$

где $\mathscr{A}'$ – коммутант алгебры $\mathscr{A}$;

(iii) *$U^*U\in\mathscr{A}'$ и $\delta\colon\mathscr{A}\to\delta(\mathscr{A})$ является морфизмом.*

Из выполнения условия (6) вытекает, что отображение $\delta(a)=UaU^*$, $a\in\mathscr{A}$, является морфизмом. Следовательно, каждая алгебра коэффициентов является ассоциированной с эндоморфизмом δ, порожденным частичной изометрией U.

В работе [1] авторы показали, как сконструировать алгебру, удовлетворяющую условиям (4)–(6), отправляясь от начальной алгебры, которая удовлетворяет только некоторым из этих условий или даже не удовлетворяет ни одному из них. Приведем необходимую для наших целей часть этой конструкции для ситуации коммутативной алгебры $\mathscr{A}$.

Обозначим через

$$\overline{E_*(\mathscr{A})} = \overline{\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A})\right\}} \tag{9}$$

C^*-алгебру, порожденную $\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A})$.

Замечание 1.6. Вспоминая алгебры $\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{A}}$, которые обсуждались выше в примерах 1.2 и 1.3, мы можем заметить, что

$$\mathscr{B} = \overline{E_*(\overline{\mathscr{A}})}.$$

Поэтому алгебра $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ (9) будет играть принципиальную роль в нашем анализе рассматриваемой задачи.

В [1; предложение 4. 1] доказано следующее утверждение.

Предложение 1.7. *Пусть $\mathscr{A}$ – коммутативная C^*-подалгебра $L(H)$, содержащая* 1. *Пусть δ – эндоморфизм $\mathscr{A}$, и пусть $U^*U \in \mathscr{A}'$. Тогда C^*-алгебра $\overline{E_*(\mathscr{A})} = \overline{\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A})\right\}}$ является минимальной коммутативной алгеброй коэффициентов для $C^*(\mathscr{A}, U)$, и оба отображения, $\delta\colon \overline{E_*(\mathscr{A})} \to \overline{E_*(\mathscr{A})}$ и $\delta_*\colon \overline{E_*(\mathscr{A})} \to \overline{E_*(\mathscr{A})}$, являются эндоморфизмами.*

Здесь $\delta\colon \overline{E_*(\mathscr{A})} \to \overline{E_*(\mathscr{A})}$ является продолжением эндоморфизма $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, а δ_* служит для него обратным отображением.

Данное предложение является отправной C^*-алгебраической точкой для анализа объектов, исследуемых в статье. В частности, этот результат вместе с вышеизложенными рассмотрениями приводит нас к естественной проблеме описания пространства максимальных идеалов алгебры коэффициентов $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ в терминах пространства максимальных идеалов алгебры $\mathscr{A}$ и действия δ. Решение этой проблемы является одной из главных целей настоящей работы.

Отметим, что некоторые конкретные примеры описания пространства максимальных идеалов $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ в ситуации, когда $\mathscr{A} = C[a,b]$ и δ порождено непрерывным отображением $\alpha\colon [a,b] \to [a,b]$ специального вида, даны в [2].

Замечание 1.8. Роль алгебр коэффициентов в C^*-теории весьма важна, так как эти алгебры являются принципиальными конструктивными элементами в скрещенных произведениях, ассоциированных с эндоморфизмами (см. [3]–[5]). Поэтому решение указанных выше задач позволяет далее естественным образом конструировать и соответствующие скрещенные произведения (см. [4]).

Статья организована следующим образом. В § 2 мы вводим необходимые для дальнейшего изложения понятия и обозначения и приводим некоторые (по большей части известные) факты о структуре эндоморфизмов коммутативных алгебр и обсуждаем их связи с динамическими системами. Основной результат – описание пространства максимальных идеалов алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ – получен в § 3. На базе этого результата в § 4 мы полностью описываем обратимые расширения C^*-динамических систем и соответствующие обратимые расширения динамических систем. Наконец, в § 5 рассмотрены некоторые примеры, показывающие, в частности, связь результатов настоящей статьи с рядом классических объектов теории динамических систем.

Статья представляет собой расширенное и переработанное изложение электронного препринта [6].

§ 2. Эндоморфизмы коммутативных C^*-алгебр и динамические системы

Начальными объектами для нас являются коммутативная C^*-алгебра $\mathscr{A}$ с единицей 1 и эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$.

Наше первое наблюдение – теорема 2.2 – показывает, что любой эндоморфизм δ порождает непрерывное частичное отображение пространства максимальных идеалов $M = M(\mathscr{A})$ алгебры $\mathscr{A}$.

Замечание 2.1. Эта теорема является частным случаем общего результата, описывающего эндоморфизмы полупростых банаховых алгебр (см. [7; § 2]), и мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Так как согласно теореме Гельфанда–Наймарка преобразование Гельфанда устанавливает изоморфизм $\mathscr{A} \cong C(M)$, то мы будем отождествлять $\mathscr{A}$ и $C(M)$ во всех дальнейших рассмотрениях.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{A}$ – коммутативная C^*-алгебра с единицей $1 \in \mathscr{A}$ и δ – эндоморфизм $\mathscr{A}$. Зададим подмножество $\Delta \subseteq M$ условием*

$$\tau \in \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(\delta(1)) = 1, \tag{10}$$

где τ – мультипликативный функционал на $\mathscr{A}$. Тогда:

(i) *множество Δ является открыто-замкнутым*;

(ii) *эндоморфизм δ задается формулой*

$$(\delta f)(x) = \begin{cases} f(\alpha(x)), & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \tag{11}$$

где $f \in C(M)$ и $\alpha\colon \Delta \to M$ – непрерывное отображение.

Доказательство. Проверим замкнутость и открытость Δ. Заметим, что $\delta(1) = \delta^2(1)$, и поэтому функция $\delta(1) \in C(M)$ является идемпотентом, значит, ее значениями являются только 0 или 1. Отсюда вытекает замкнутость и открытость Δ.

В терминах преобразования Гельфанда $a \to \widehat{a}$ мы можем задать действие δ на $C(M)$ с помощью формулы

$$(\delta\widehat{a})(\tau) = \tau(\delta(a)) = \widehat{a}(\delta^*(\tau)), \qquad \tau \in M, \tag{12}$$

где $\delta^*\colon A^* \to A^*$ – оператор, сопряженный к δ. Ясно, что

$$\delta^*(\tau) = \tau \circ \delta \tag{13}$$

является мультипликативным функционалом и $\delta^*(\tau)(1) = \tau(\delta(1))$. По определению множества Δ имеем

$$\tau \notin \Delta \quad \Longrightarrow \quad \delta^*(\tau) \equiv 0, \tag{14}$$

$$\tau \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \delta^*(\tau) \in M. \tag{15}$$

Задав теперь отображение $\alpha\colon \Delta \longrightarrow M$ как сужение отображения δ^*

$$\alpha = \delta^*\big|_{\Delta}, \tag{16}$$

мы получаем утверждение теоремы.

Предложение 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *и пусть отображение* $\alpha\colon \Delta\to M$ *задается формулой* (11). *Тогда*:

(i) *если* $\ker\delta=\{0\}$, *то* $\alpha\colon \Delta\to M$ *является сюръекцией*;

(ii) *если* $\delta(1)=1$, *то* $\Delta=M$.

Доказательство. Пусть $\ker\delta=\{0\}$. Тогда δ является инъекцией и для него существует правое обратное отображение $\varrho\colon\delta(\mathscr{A})\to\mathscr{A}$. Поэтому мы имеем

$$\varrho(\delta(a))=a,\qquad a\in\mathscr{A}. \tag{17}$$

Для каждого $\tau\in M$ функционал $\tau\circ\varrho$ определен на $\delta(\mathscr{A})$ и является ненулевым и мультипликативным. Значит, существует его продолжение $\tau_1\in M$ на $\mathscr{A}$ (см. [8; п. 2.10.2]) и, следовательно,

$$\tau_1\circ\delta=\tau. \tag{18}$$

Отсюда и из (13) и (16) вытекает сюръективность α.

Пусть теперь $\delta(1)=1$. Это равенство означает, что для любого $\tau\in M$ выполняется $\tau(\delta(1))=1$. Таким образом, из (10) следует $\Delta=M$. Доказательство завершено.

Теорема 2.2 делает естественным следующее определение (частичной) динамической системы.

Определение 2.4. *Динамической системой* (*частичной*) мы будем называть тройку (M,Δ,α), где M – компактное топологическое пространство, $\Delta\subset M$ – открыто-замкнутое подмножество и $\alpha\colon\Delta\to M$ – непрерывное отображение. Для сокращения записи, если это не вызывает недоразумений, будем также использовать обозначение (M,α).

Замечание 2.5. 1) Обычно, говоря о динамической системе, подразумевают, что отображение α задано на всем множестве M, т.е. в терминах нашего определения имеют в виду случай (M,M,α).

2) Согласно теореме 2.2 любой эндоморфизм δ алгебры $C(M)$ однозначно задает частичную динамическую систему (M,Δ,α). Ясно также, что любая частичная динамическая система (M,Δ,α) однозначно (формулой (11)) задает эндоморфизм δ алгебры $C(M)$. Таким образом, по существу теорема 2.2 определяет взаимно однозначное соответствие между эндоморфизмами $C(M)$ и частичными динамическими системами.

Определение 2.6. Будем говорить, что частичная динамическая система (M,Δ,α) *обратима*, если $\alpha(\Delta)$ является открытым подмножеством M и отображение $\alpha\colon\Delta\to\alpha(\Delta)$ является гомеоморфизмом.

Определение 2.7. Пусть (M,Δ,α) – частичная динамическая система. *Обратимым расширением* этой *системы* называется частичная динамическая система $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$, обладающая следующими свойствами:

(i) $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ – обратимая частичная динамическая система;

(ii) существует непрерывная сюръекция $\Psi\colon\widetilde{M}\to M$, осуществляющая полусопряжение между $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ и (M,Δ,α), т.е. удовлетворяющая условиям

$$\Psi(\widetilde{\Delta})=\Delta,\qquad \Psi(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Delta})=M\setminus\Delta,\qquad \Psi(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}))=M\setminus\alpha(\Delta), \tag{19}$$

$$\alpha(\Psi(\widetilde{x}))=\Psi(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})),\qquad \widetilde{x}\in\widetilde{\Delta}. \tag{20}$$

Проблемы, рассматриваемые в данной статье, связаны с построением обратимых расширений динамических систем.

Возвратимся теперь к C^*-алгебраической интерпретации обсуждаемых объектов. Далее в этом параграфе $\mathscr{A}$ является C^*-подалгеброй алгебры $L(H)$, содержащей единичный оператор 1 и $U \in L(H)$ – оператор такой, что отображение

$$\delta(a) = UaU^*, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{21}$$

является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$ (отсюда, в частности, следует, что U – частичная изометрия).

Заметим, что, применяя n раз эндоморфизм δ, мы получаем

$$U^nU^{*n} = \delta^n(1) = \delta^n(1^2) = (\delta^n(1))^2 = (U^nU^{*n})^2,$$

что означает, что U^n – частичная изометрия и, таким образом, U – степенная частичная изометрия.

Конкретный вид (21) эндоморфизма δ и эквивалентность (10) позволяют переписать теорему 2.2 для рассматриваемых объектов в следующей форме.

Теорема 2.8. *Пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ – коммутативная C^*-алгебра, содержащая единичный оператор* 1, *и пусть отображение $\delta(a) = UaU^*$ является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$. Тогда*:

(i) *множество $\Delta = \{\tau \in M : \tau(UU^*) = 1\}$ является открыто-замкнутым*;

(ii) *на пространстве максимальных идеалов M эндоморфизм δ задается формулой*

$$(\delta f)(x) = \begin{cases} f(\alpha(x)), & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \tag{22}$$

где $f \in C(M)$ и $\alpha\colon \Delta \to M$ – непрерывное отображение.

Более того, из предложения 2.3 вытекает

Предложение 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы 2.8 и $\alpha\colon \Delta \to M$ задается формулой (22). Тогда*:

(i) *если U является унитарным оператором, то $\Delta = M$ и $\alpha\colon M \to M$ – сюръекция*;

(ii) *если U – изометрия, то $\alpha\colon \Delta \to M$ – сюръекция*;

(iii) *если U^* – изометрия, то $\Delta = M$.*

Как показывает следующая теорема, ситуация, описанная в теореме 2.8, существенно упрощается, если наряду с эндоморфизмом δ (21) отображение

$$\delta_*(a) = U^*aU, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{23}$$

также является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$.

Теорема 2.10. *Пусть $\mathscr{A}$ – коммутативная C^*-подалгебра алгебры $L(H)$, содержащая единицу* 1, *и отображения δ, δ_*, заданные формулами (21), (23), являются эндоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$. Пусть M – пространство максимальных идеалов $\mathscr{A}$. Тогда*:

(i) *множества $\Delta_1 = \{\tau \in M : \tau(UU^*) = 1\}$ и $\Delta_{-1} = \{\tau \in M : \tau(U^*U) = 1\}$ являются открыто-замкнутыми*;

(ii) *в терминах алгебры $C(M)$ эндоморфизм δ задается формулой*

$$(\delta f)(x) = \begin{cases} f(\alpha(x)), & x \in \Delta_1, \\ 0, & x \notin \Delta_1, \end{cases} \tag{24}$$

где $f \in C(M)$ и $\alpha\colon \Delta_1 \to \Delta_{-1}$ является гомеоморфизмом;

(iii) *эндоморфизм δ_* задается формулой*

$$(\delta_* f)(x) = \begin{cases} f(\alpha^{-1}(x)), & x \in \Delta_{-1}, \\ 0, & x \notin \Delta_{-1}, \end{cases} \tag{25}$$

где $f \in C(M)$.

В частности, динамическая система (M, Δ, α) обратима.

Доказательство. Согласно теореме 2.8 множества $\Delta_1, \Delta_{-1} \subseteq M$, задающиеся отношениями

$$\tau \in \Delta_1 \iff \tau(UU^*) = 1, \tag{26}$$

$$\tau \in \Delta_{-1} \iff \tau(U^*U) = 1, \tag{27}$$

являются открыто-замкнутыми и существуют непрерывные отображения

$$\alpha\colon \Delta_1 \to M, \qquad \alpha'\colon \Delta_{-1} \to M,$$

для которых δ и δ_* удовлетворяют (22) соответственно. Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\alpha' = \alpha^{-1}$. Это равенство вытекает из соотношений

$$\tau \in \Delta,\ a \in A \implies \tau(\delta(\delta_*(a)) = \tau(UU^*)\tau(a)\tau(UU^*) = \tau(a), \tag{28}$$

$$\tau \in \Delta_{-1},\ a \in A \implies \tau(\delta_*(\delta(a)) = \tau(U^*U)\tau(a)\tau(U^*U) = \tau(a), \tag{29}$$

что равносильно равенству $(\alpha' \circ \alpha)(\tau) = (\alpha \circ \alpha')(\tau) = \tau$. Доказательство завершено.

Приведенные результаты делают естественным следующее

Определение 2.11. *C^*-динамической системой* мы будем называть пару $(\mathscr{A}, U)$, где $\mathscr{A}$ является коммутативной C^*-подалгеброй алгебры $L(H)$, содержащей единичный оператор 1 и $U \in L(H)$ – оператор, удовлетворяющий двум условиям:

1) отображение
$$\delta(a) := UaU^*, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{30}$$
является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$;

2) $$U^*U \in \mathscr{A}. \tag{31}$$

Замечание 2.12. Как уже отмечалось выше, из условия 1) следует, что U – частичная изометрия.

2.1. C^*-динамические системы и частичные динамические системы. Обсудим взаимосвязь между C^*-динамическими системами и частичными динамическими системами.

Пусть $(\mathscr{A}, U)$ – C^*-динамическая система и $M = M(\mathscr{A})$ – пространство максимальных идеалов алгебры $\mathscr{A}$. Система $(\mathscr{A}, U)$ однозначно определяет частичную динамическую систему (M, Δ, α), описанную в теореме 2.8. При этом условие (31) означает, что множество $\alpha(\Delta)$ является открыто-замкнутым (так как проектор $U^*U \in \mathscr{A}$ задается характеристической функцией множества $\alpha(\Delta)$ (ср. формулу (27)).

Верно и обратное утверждение. Для его формулировки нам понадобится следующее определение.

Определение 2.13. Пусть (M, Δ, α) – частичная динамическая система. Будем говорить, что C^*-динамическая система $(\mathscr{A}, U)$ *отвечает системе* (M, Δ, α) (или что $(\mathscr{A}, U)$ является *ковариантным представлением системы* (M, Δ, α)), если пространство максимальных идеалов $M(\mathscr{A})$ алгебры $\mathscr{A}$ равно M и эндоморфизм $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ задается формулой (22).

Как показано ниже (в п. 4.2),

для любой частичной динамической системы (M, Δ, α) *такой, что множество* $\alpha(\Delta)$ *является открыто-замкнутым, существует* C^**-динамическая система* $(\mathscr{A}, U)$, *отвечающая системе* (M, Δ, α).

Замечание 2.14. Если для заданной частичной динамической системы (M, Δ, α) существует C^*-динамическая система $(\mathscr{A}, U)$, отвечающая ей, то она обязательно не единственная, в частности, если для уже заданной алгебры $\mathscr{A}$ оператор U порождает эндоморфизм δ вида (22), то для любого числа λ, $|\lambda| = 1$, оператор λU порождает тот же эндоморфизм. Однако, может быть, уже здесь важно отметить, что исследуемые в данной статье объекты будут эквивалентным способом описываться любой C^*-динамической системой, отвечающей заданной частичной динамической системе (M, Δ, α) (ср. замечание 3.6).

Определение 2.15. Будем говорить, что C^*-динамическая система $(\mathscr{A}, U)$ *обратима*, если кроме условия 1) определения 2.11 выполняется еще следующее условие: отображение

$$\delta_*(a) = U^*aU, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{32}$$

также является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$. (Ясно, что условие 2) определения 2.11 при этом выполняется автоматически.)

Замечание 2.16. В свете теоремы 2.10 эндоморфизмы δ и δ_* здесь естественно считать взаимно обратными.

Определение 2.17. Пусть $(\mathscr{A}, U)$ – C^*-динамическая система. Будем говорить, что C^*-динамическая система $(\mathscr{B}, U)$ (с тем же оператором U) является *обратимым расширением* системы $(\mathscr{A}, U)$, если выполняются следующие два условия:

(i) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$;

(ii) C^*-динамическая система $(\mathscr{B}, U)$ обратима.

Систему $(\mathscr{A}, U)$ естественно при этом называть *подсистемой* системы $(\mathscr{B}, U)$.

2.2. Обратимые расширения C^*-динамических систем и динамических систем. Обсудим связь между обратимыми расширениями C^*-динамических систем и обратимыми расширениями динамических систем.

Пусть $(\mathscr{A},U)$ – C^*-динамическая система и $(\mathscr{B},U)$ – ее обратимое расширение. Пусть (M,Δ,α) – динамическая система, определяемая системой $(\mathscr{A},U)$ в соответствии с п. 2.1, а $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ – динамическая система, определяемая системой $(\mathscr{B},U)$. Согласно теореме 2.10 динамическая система $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ обратима. Зададим отображение $\Psi\colon \widetilde{M}\to M$ формулой

$$\Psi(\widetilde{x})=\widetilde{x}\big|_{\mathscr{A}}; \tag{33}$$

здесь $\widetilde{x}\big|_{\mathscr{A}}$ – сужение мультипликативного функционала $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$ на подалгебру $\mathscr{A}$. Так как $1\in\mathscr{A}$, то $\Psi(\widetilde{x})$ – ненулевой мультипликативный функционал, т.е. $\Psi(\widetilde{x})\in M$. Кроме того, так как любой мультипликативный функционал $y\in M$ продолжается до некоторого мультипликативного функционала $\widetilde{y}\in\widetilde{M}$ (см. [8; предложение 2. 10. 2]), то отображение Ψ является сюръекцией. Помимо этого из определения Ψ, Δ и $\widetilde{\Delta}$ и п. (i) теоремы 2.8 следует, что

$$\Psi(\widetilde{\Delta})=\Delta, \qquad \Psi(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Delta})=M\setminus\Delta,$$

а из формул (13) и (16) вытекает, что и все остальные равенства в (19) и (20) выполнены. Таким образом, Ψ задает полусопряженность между $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ и (M,Δ,α) и, значит, $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ является обратимым расширением (M,Δ,α).

Итак, мы установили, что обратимое расширение C^*-динамической системы $(\mathscr{A},U)$ порождает обратимое расширение задаваемой ею частичной динамической системы (M,Δ,α).

Вспоминая теперь предложение 1.7, мы понимаем, что это предложение и вышеприведенные рассмотрения указывают на естественного C^*-алгебраического кандидата на обратимое расширение C^*-динамической системы $(\mathscr{A},U)$, а именно на C^*-динамическую систему $(\overline{E_*(\mathscr{A})},U)$.

С описания пространства максимальных идеалов алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$, приведенного в следующем параграфе, мы и начнем наше исследование.

Замечание 2.18. В связи с рассматриваемыми вопросами и возникающими в статье объектами упомянем также ряд направлений исследований в анализе, имеющих физическое происхождение и схожую в том или ином смысле "математическую философию".

Одним из способов установления связи между квантовой и классической механикой является рассмотрение квантовой механики как своего рода некоммутативного "поднятия" над классической (коммутативной) механикой. При этом классическая динамическая система получается из соответствующей квантовой динамической системы путем некоторого усреднения (проектирования) последней (классическая механика является "тенью" квантовой). Обратный процесс (процесс получения из классической динамической системы ее квантового "поднятия") называется *квантизацией* динамической системы.

Проблемы, обсуждаемые в данной статье, связаны с построением обратимых расширений динамических систем. В свете вышеприведенной "философии" такие конструкции можно рассматривать как обратимые "квантизации" исходных необратимых динамических систем.

Еще один круг вопросов, также имеющий “квантовое” происхождение, относится к так называемой проблеме скрытых параметров. Эта проблема связана с гипотезой о том, что вероятностный (а значит, по сути необратимый) характер аксиом квантовой механики возникает из-за того, что мы не знаем (не можем определить) некоторые скрытые параметры, после нахождения которых вероятностная квантовая картина восстановит свою “исходную” детерминированную форму (т.е. станет картиной типа классической механики). Проблема скрытых параметров до сих пор не разрешена, и в любом случае уже ясно, что количество скрытых параметров, если таковые обнаружатся, будет очень велико и, соответственно, “исходная” детерминированная форма будет сверхсложной. Построение обратимых расширений необратимых динамических систем с такой точки зрения можно рассматривать как нахождение скрытых параметров, восстанавливающих “исходную” обратимую форму динамической системы. В настоящей работе мы найдем эти скрытые параметры (они описаны в теореме 3.5 формулой (60)).

§ 3. Пространство максимальных идеалов коммутативной алгебры коэффициентов

В этом параграфе мы фиксируем коммутативную C^*-подалгебру $\mathscr{A} \subset L(H)$, $1 \in \mathscr{A}$ и частичную изометрию $U \in L(H)$ такую, что отображение (21) является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$ и $U^*U \in \mathscr{A}'$. Наша цель – дать описание пространства максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ C^*-алгебры коэффициентов $\overline{E_*(\mathscr{A})} = \overline{\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A})\right\}}$ (см. предложение 1.7) в терминах пространства максимальных идеалов $M = M(\mathscr{A})$ алгебры $\mathscr{A}$ и действия δ, заданного формулой (22).

Начнем с введения необходимых объектов и обозначений.

Пусть $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ – линейный мультипликативный функционал на $\overline{E_*(\mathscr{A})}$. Рассмотрим последовательность функционалов $\xi_{\widetilde{x}}^n : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots$, заданных условиями

$$\xi_{\widetilde{x}}^n(a) = \delta_*^n(a)(\widetilde{x}), \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{34}$$

Так как $\overline{E_*(\mathscr{A})} = \overline{\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A})\right\}}$, то последовательность $\xi_{\widetilde{x}}^n$ определяет $\widetilde{x}$ единственным способом. С другой стороны, так как δ_* является эндоморфизмом $\overline{E_*(\mathscr{A})}$, мы заключаем, что функционалы $\xi_{\widetilde{x}}^n$ являются линейными и мультипликативными на $\mathscr{A}$ (при этом, возможно, $\xi_{\widetilde{x}}^n = 0$). Таким образом, либо

$$\xi_{\widetilde{x}}^n = x_n \in M, \tag{35}$$

либо

$$\xi_{\widetilde{x}}^n = 0. \tag{36}$$

Очевидно, отображение

$$\widetilde{x} \to (\xi_{\widetilde{x}}^0, \xi_{\widetilde{x}}^1, \dots) \tag{37}$$

является инъекцией.

Пусть (M, Δ, α) – динамическая система, определяемая эндоморфизмом $\delta(\,\cdot\,) := U(\,\cdot\,)U^*$ согласно теореме 2.8. Мы будем использовать следующие множества. Положим

$$\Delta_n = \alpha^{-n}(M), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{38}$$

т.е. Δ_n – это множество, на котором определено α^n, и пусть

$$\Delta_{-n} = \alpha^n(\Delta_n), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{39}$$

– образ α^n.

Мы имеем

$$\alpha^n\colon \Delta_n \to \Delta_{-n}, \tag{40}$$

$$\alpha^n(\alpha^m(x)) = \alpha^{n+m}(x), \qquad x \in \Delta_{n+m}. \tag{41}$$

В терминах мультипликативных функционалов множества Δ_n могут быть определены следующим образом: для $n > 0$

$$\tau \in \Delta_n* \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{0<k\leqslant n}\, \tau(U^k U^{*k}) = 1, \tag{42}$$

$$\tau \in \Delta_{-n}* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{\tau_n \in \Delta_n}\, \tau_n \circ \delta^n = \tau. \tag{43}$$

Заметим, что последовательность проекторов $U^k U^{*k}$ является убывающей, и поэтому равенство $\tau(U^n U^{*n}) = 1$ влечет равенство $\tau(U^k U^{*k}) = 1$ для $k < n$. Таким образом, мы можем переписать условие (42) в виде условия

$$\tau \in \Delta_n \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(U^n U^{*n}) = 1. \tag{44}$$

Замечание 3.1. В ситуации, рассмотренной в теореме 2.10, множества Δ_{-n} по сути являются множествами, на которых определено отображение α^{-n}. Более того, в терминах максимальных идеалов мы имеем

$$\tau \in \Delta_n \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(U^n U^{*n}) = 1, \tag{45}$$

$$\tau \in \Delta_{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(U^{*n} U^n) = 1, \tag{46}$$

где $n \geqslant 0$.

Следующая теорема является первым шагом в описании пространства максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$.

Теорема 3.2 (“оценка сверху” пространства максимальных идеалов). *Пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ является коммутативной C^*-подалгеброй и $1 \in \mathscr{A}$. Предположим, что $\delta(a) = UaU^*$ – эндоморфизм $\mathscr{A}$, $U^*U \in \mathscr{A}'$ и $\alpha\colon \Delta \to M(\mathscr{A})$ является частичным отображением, заданным формулой* (22), *и Δ_n – множества, определенные в* (38), (39). *Тогда пространство максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ гомеоморфно подмножеству счетной суммы непересекающихся множеств; конкретнее, отображение* (37) (*вместе с замечаниями* (35) *и* (36)) *определяет топологическое вложение*

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) \hookrightarrow \bigcup_{N=0}^{\infty} M_N \cup M_\infty, \tag{47}$$

где M_N – множества вида

$$M_N = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) : x_n \in \Delta_n,\, \alpha(x_n) = x_{n-1},\, n = 1, \dots, N\bigr\}$$

и M_∞ задано условием

$$M_\infty = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_n,\, \alpha(x_n) = x_{n-1},\, n \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

Топология на M_N, $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и M_∞ индуцирована базой окрестностей точек $\widetilde{x} \in M_N$

$$O(a_1,\dots,a_k,\varepsilon)=\bigl\{\widetilde{y}\in M_N : |a_i(x_N)-a_i(y_N)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k\bigr\} \tag{48}$$

и соответственно точек $\widetilde{x} \in M_\infty$

$$O(a_1,\dots,a_k,n,\varepsilon)=\biggl\{\widetilde{y}\in\bigcup_{N=n}^{\infty} M_N\cup M_\infty : |a_i(x_n)-a_i(y_n)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k\biggr\}, \tag{49}$$

где $\varepsilon>0$, $a_i\in A$ и $k,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Доказательство. Выше было отмечено, что отображение (37) является инъекцией. В правой части (37) мы можем столкнуться с одной из двух следующих возможных ситуаций.

1) Предположим сначала, что некоторые из функционалов $\xi^n_{\widetilde{x}}$ являются нулевыми. Пусть N – первый номер такой, что

$$\xi^{N+1}_{\widetilde{x}}\equiv 0.$$

Заметим, что для любого $n\in\mathbb{N}$ мы имеем

$$\xi^n_{\widetilde{x}}\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \widetilde{x}(U^{*n}U^n)=1, \tag{50}$$

и последовательность $\{U^{*n}U^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является убывающей последовательностью коммутирующих проекторов (см. [1; предложение 3.6]), т.е. для $i\leqslant j$

$$U^{*i}U^iU^{*j}U^j=U^{*j}U^jU^{*i}U^i=U^{*j}U^j.$$

Поэтому для каждого $n>N$ мы получаем

$$\widetilde{x}(U^{*n}U^n)=\widetilde{x}(U^{*N+1}U^{N+1}U^{*n}U^n)=\widetilde{x}(U^{*N+1}U^{N+1})\widetilde{x}(U^{*n}U^n)=0,$$

т.е. $\xi^n_{\widetilde{x}}\equiv 0$ для $n>N$.

Так как для каждого $0\leqslant n\leqslant N$ справедливо неравенство $\xi^n_{\widetilde{x}}\neq 0$, то существует $x_n\in M(A)$ такое, что

$$\xi^n_{\widetilde{x}}(a)=a(x_n),\qquad a\in\mathscr{A}, \tag{51}$$

и, значит, отображение (37) (вспомним здесь (35) и (36)) имеет вид $\widetilde{x}\mapsto(x_0,x_1,\dots,x_N,0,\dots)$. Более того, так как проекторы $U^{*i}U^i$, U^jU^{*j} коммутируют между собой, то

$$\begin{gathered}U^{*n}U^nU^{*n-1}=U^{*n-1}(U^*U)(U^{n-1}U^{*n-1})=(U^{*n-1}U^{n-1}U^{*n-1})U^*U=U^{*n}U,\\ U^{n-1}U^{*n}U^n=(U^{n-1}U^{*n-1})(U^*U)U^{n-1}=U^*U(U^{n-1}U^{*n-1}U^{n-1})=U^*U^n.\end{gathered}$$

Отсюда и из равенства $\widetilde{x}(U^{*n}U^n)=1$ для каждого $n=1,\dots,N$ заключаем, что для любого $a\in\mathscr{A}$ и $0<n\leqslant N$ выполняется

$$\begin{aligned}a(x_{n-1})&=\xi^{n-1}_{\widetilde{x}}(a)=\widetilde{x}(\delta^{n-1}_*(a))=\widetilde{x}(U^{*n}U^n)\widetilde{x}(\delta^{n-1}_*(a))\widetilde{x}(U^{*n}U^n)\\&=\widetilde{x}(U^{*n}U^nU^{*n-1}aU^{n-1}U^{*n}U^n)=\widetilde{x}(U^{*n}UaU^*U^n)=\widetilde{x}(\delta^n_*(\delta(a)))\\&=\xi^n_{\widetilde{x}}(\delta(a))=\delta(a)(x_n)=a(\alpha(x_n)),\end{aligned}$$

где в последних двух равенствах мы использовали формулы (51) и (22). Так как алгебра $\mathscr{A}$ разделяет точки $M(\mathscr{A})$, то

$$\alpha(x_n) = x_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Следовательно,

$$x_n \in \Delta_n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{53}$$

и поэтому

$$\widetilde{x} \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in M_N.$$

2) Предположим теперь, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\xi_{\widetilde{x}}^n \neq 0,$$

т.е. $\xi_{\widetilde{x}}^n \in M(\mathscr{A})$. Выбирая $x_n \in M(\mathscr{A})$ из условия (51), мы видим, что отображение (37) имеет вид $\widetilde{x} \mapsto (x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Теми же рассуждениями, что и в случае 1), мы устанавливаем равенство

$$\alpha(x_n) = x_{n-1}, \qquad n \geqslant 1. \tag{54}$$

По определению Δ_n, $n \in \mathbb{Z}$, имеем

$$x_n \in \Delta_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Поэтому

$$\widetilde{x} \mapsto (x_0, x_1, x_2, \dots) \in M_\infty.$$

Напомним теперь, что отображение (37) является инъекцией и, как уже показано выше, правая часть (37) принадлежит M_N или M_∞ (в зависимости от $\widetilde{x}$). Это означает, что (37) задает вложение (47).

Заметим, наконец, что топология пространства $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ является *-слабой. Поэтому фундаментальной системой окрестностей точки $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in M_\infty$ является семейство множеств вида

$$O(b_1, \dots, b_k, \varepsilon) = \bigl\{\widetilde{y} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) : |b_i(\widetilde{x}) - b_i(\widetilde{y})| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\bigr\}, \tag{56}$$

где $b_i \in \overline{E_*(\mathscr{A})}$, $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{E_*(\mathscr{A})} = \overline{\{\bigcup_{n=0}^\infty \delta_*^n(\mathscr{A})\}}$, то в (56) достаточно выбирать $b_i = \delta_*^n(a_i)$, $a_i \in \mathscr{A}$, $i = 0, \dots, k$, и тогда мы получаем, что

$$\begin{aligned} O(b_1, \dots, b_k, \varepsilon) &= \bigl\{\widetilde{y} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) : |\delta_*^n(a_i)(\widetilde{x}) - \delta_*^n(a_i)(\widetilde{y})| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\bigr\} \\ &= \bigl\{\widetilde{y} = (y_0, y_1, \dots) \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) : |a_i(x_n) - a_i(y_n)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\bigr\}. \end{aligned}$$

Полагая $O(a_1, \dots, a_k, n, \varepsilon) = O(b_1, \dots, b_k, \varepsilon) \cap \bigl(\bigcup_{N \geqslant n} M_N \cup M_\infty\bigr)$, мы получаем фундаментальную систему окрестностей, упомянутую в утверждении теоремы.

В случае точки $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in M_N$ мы полагаем

$$O(a_1, \dots, a_k, \varepsilon) = O(a_1, \dots, a_k, N, \varepsilon) \cap M_N.$$

Таким образом, формулы (48) и (49) определяют базу окрестностей точки $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) \hookrightarrow \bigcup_{N=0}^\infty M_N \cup M_\infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.3. Весьма полезным фактом является наблюдение, что множество операторов вида $b = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^N(a_N)$, где $a_0, a_1, \dots, a_N \in A$, является плотным подмножеством в $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ (см. [1; предложение 3.8]). Отсюда и из определения (51) функционалов, генерирующих последовательность $\widetilde{x} = (x_0, \dots)$, мы заключаем, что

$$b(\widetilde{x}) = a_0(x_0) + a_1(x_1) + \dots + a_N(x_N),$$

когда $\widetilde{x} = (x_0, \dots) \in \bigcup_{n=N}^{\infty} M_n \cup M_\infty$, и

$$b(\widetilde{x}) = a_0(x_0) + a_1(x_1) + \dots + a_n(x_k),$$

когда $\widetilde{x} = (x_0, \dots, x_k, 0, \dots) \in \bigcup_{n=0}^{N} M_n$.

Доказанная теорема дает "оценку сверху" для пространства $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$. Следующая теорема 3.4 представляет собой "оценку снизу". Прежде чем переходить к ее формулировке, подчеркнем, что предыдущая теорема утверждает, что каждый элемент $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ порождает (задает единственным образом) либо элемент из M_N, либо элемент из M_∞. С другой стороны, если задана последовательность $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in M_N$ или последовательность $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in M_\infty$, то заранее нельзя сказать, что она порождена некоторым элементом $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ (это будет иметь место, только если последовательность имеет вид (37)). Теорема 3.4 говорит, что все последовательности из подмножества $\widehat{M}_N \subset M_N$ (которое в общем случае может быть существенно меньше, чем M_N) и все последовательности из M_∞ действительно порождены некоторыми элементами $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$.

Теорема 3.4 ("оценка снизу" пространства максимальных идеалов). *Пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ – коммутативная C^*-алгебра, $1 \in \mathscr{A}$, и пусть $U \in L(H)$ является частичной изометрией такой, что $U^*U \in \mathscr{A}'$. В силу теоремы 3.2 мы можем рассматривать $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ как подмножество пространства $\bigcup_{N\geqslant 0} M_N \cup M_\infty$, с другой стороны, справедливо включение*

$$\bigcup_{N=0}^{\infty} \widehat{M}_N \cup M_\infty \subset M(\overline{E_*(\mathscr{A})}), \tag{57}$$

где $\widehat{M}_N$ – множества вида

$$\widehat{M}_N = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) : x_N \in \Delta_N,\ x_N \notin \Delta_{-1},\ \alpha(x_n) = x_{n-1}\bigr\}$$

и $M_\infty = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_n,\ \alpha(x_n) = x_{n-1},\ n \geqslant 1\bigr\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $M_\infty \subset M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$. Пусть $(x_0, x_1, \dots)$ – произвольная последовательность элементов из $M(\mathscr{A})$, удовлетворяющая условию $\alpha(x_n) = x_{n-1}$ для каждого $n \geqslant 1$. Докажем, что существует линейный мультипликативный функционал $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$, порождающий эту последовательность (т.е. что выполняются все равенства (51), $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\xi_{\widetilde{x}}^n$ заданы формулой (34)).

Действительно, рассмотрим множества

$$\widetilde{X}^n = \bigl\{\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) : \forall_{a\in A}\ \xi_{\widetilde{x}}^n(a) = a(x_n)\bigr\}, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{58}$$

где $\xi_{\widetilde{x}}^n$ заданы формулой (34). Мы имеем:

1) $\widetilde{X}^n \neq \varnothing$. Это справедливо в силу того, что (58) – множество всех продолжений мультипликативных функционалов с $\delta_*^n(\mathscr{A})$ на $\overline{E_*(\mathscr{A})}$. Как известно, для каждого мультипликативного функционала на коммутативной C^*-подалгебре существует его продолжение до мультипликативного функционала на большей коммутативной C^*-алгебре (см. [8; п. 2.10.2]);
2) $\widetilde{X}^n$ замкнуто. Это следует из определения *-слабой сходимости;
3) $\widetilde{X}^0 \supset \widetilde{X}^1 \supset \cdots \supset \widetilde{X}^n \supset \cdots$. Действительно, если $\widetilde{x} \in \widetilde{X}^n$, то

$$a(x_{n-1}) = a(\alpha(x_n)) = \delta(a)(x_n) = \xi_{\widetilde{x}}^n(\delta(a)) = \xi_{\widetilde{x}}^{n-1}(a), \qquad a \in \mathscr{A},$$

т.е. $\widetilde{x} \in \widetilde{X}^{n-1}$.

Таким образом, семейство множеств $\widetilde{X}^n$ образует убывающую последовательность непустых компактных множеств, и, следовательно, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{X}^n \neq \varnothing$. Из определения множества $\widetilde{X}^n$ вытекает, что любая точка $\widetilde{x} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{X}^n$ порождает одну и ту же последовательность

$$(\xi_{\widetilde{x}}^0, \xi_{\widetilde{x}}^1, \xi_{\widetilde{x}}^2, \dots) = (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Но выше уже было отмечено, что отображение

$$\widetilde{x} \to (\xi_{\widetilde{x}}^0, \xi_{\widetilde{x}}^1, \xi_{\widetilde{x}}^2, \dots)$$

является инъекцией, поэтому множество

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{X}^n = \{\widetilde{x}\}$$

сводится к единственной точке.

Пусть теперь $(x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in \widehat{M}_N$. Рассмотрим множества $\widetilde{X}^n$, заданные формулой (58), но только для $n = 0, 1, \dots, N$. Приведенные выше рассуждения показывают, что эти множества непусты и образуют убывающую последовательность. Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{X}^N$. Чтобы отождествить $\widetilde{x}$ с последовательностью $(\xi_{\widetilde{x}}^0, \xi_{\widetilde{x}}^1, \dots, \xi_{\widetilde{x}}^N, 0, \dots) = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$, определенной в (37), достаточно показать, что

$$\xi_{\widetilde{x}}^{N+1} \equiv 0.$$

Предположим, напротив, что $\xi_{\widetilde{x}}^{N+1} \neq 0$. Тогда из части 1) доказательства теоремы 3.2 мы получаем, что $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots)$, где $\alpha(x_{N+1}) = x_N$, а это противоречит тому факту, что $x_N \notin \Delta_{-1} = \alpha(\Delta_1)$. Доказательство завершено.

В общей ситуации в теоремах 3.2, 3.4 ни одно из включений (47) или (57) не является равенством. Однако, как показывает следующий результат, в ситуации, когда $\mathscr{A}$ содержит элемент $\delta_*(1) = U^*U$, мы имеем равенство в формуле (57), поэтому она дает полное описание пространства максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$.

Теорема 3.5 (пространство максимальных идеалов: точное описание). *Пусть $\mathscr{A} \subset L(H)$ – коммутативная C^*-алгебра, содержащая единицу. Пусть $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$. Более того, пусть*

$$U^*U \in \mathscr{A}. \tag{59}$$

Тогда пространство максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ *алгебры* $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ *гомеоморфно счетной дизъюнктной сумме открыто-замкнутых множеств* $\widehat{M}_N$ *и замкнутого множества* M_∞ *(мы допускаем пустые множества)*

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) = \bigcup_{N=0}^{\infty} \widehat{M}_N \cup M_\infty, \tag{60}$$

где

$$\widehat{M}_N = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) : x_N \in \Delta_N,\, x_N \notin \Delta_{-1},\, \alpha(x_n) = x_{n-1}\bigr\},$$
$$M_\infty = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_n \cap \Delta_{-\infty},\, \alpha(x_n) = x_{n-1},\, n \geqslant 1\bigr\}.$$

Топология на $\bigcup_{N=0}^{\infty} \widehat{M}_N \cup M_\infty$ *задается фундаментальной системой окрестностей точек* $\widetilde{x} \in \widehat{M}_N$

$$O(a_1, \dots, a_k, \varepsilon) = \bigl\{\widetilde{y} \in \widehat{M}_N : |a_i(x_N) - a_i(y_N)| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, k\bigr\} \tag{61}$$

и соответственно точек $\widetilde{x} \in M_\infty$

$$O(a_1, \dots, a_k, n, \varepsilon) = \biggl\{\widetilde{y} \in \bigcup_{N=n}^{\infty} \widehat{M}_N \cup M_\infty : |a_i(x_n) - a_i(y_n)| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, k\biggr\},$$

где $\varepsilon > 0$, $a_i \in A$ *и* $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Из теорем 3.2 и 3.4 вытекает, что для доказательства равенства (60) достаточно показать, что для любого $\widetilde{x} \in M(\overline{E_*(A)})$ выполняется

$$\widetilde{x} \in M_N \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{x} \in \widehat{M}_N.$$

Предположим, напротив, что $\widetilde{x} \in M_N$ и $\widetilde{x} \notin \widehat{M}_N$. Тогда $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$, $x_n \in M(\mathscr{A})$ и существует $x_{N+1} \in \Delta_1 \subset M(\mathscr{A})$ такой, что $\alpha(x_{N+1}) = x_N$. Из определения (51) функционалов x_n и определения (34) функционалов $\xi^n_{\widetilde{x}}$ следует, что $\widetilde{x}(U^{*n}aU^n) = a(x_n)$ для каждого $a \in A$ и $n = 0, \dots, N$ и $\widetilde{x}(U^{*n}aU^n) = 0$, когда $n > N$. В частности, мы имеем

$$\widetilde{x}(U^{*N}U^N) = 1, \qquad \widetilde{x}(U^{*N+1}U^{N+1}) = 0.$$

Из формулы (22) получаем

$$\widetilde{x}(U^{*N}aU^N) = a(x_N) = a(\alpha(x_{N+1})) = \delta(a)(x_{N+1}), \qquad a \in A.$$

Положив в данной формуле $a = U^*U \in A$, мы получаем $\delta(U^*U)(x_{N+1}) = 0$. С другой стороны, для $\delta(U^*U)(x_{N+1})$ имеем

$$\delta(U^*U)(x_{N+1}) = x_{N+1}(UU^*UU^*) = x_{N+1}(UU^*)x_{N+1}(UU^*) = 1.$$

Тем самым, мы пришли к противоречию, что и доказывает (60).

Замкнутость и открытость множеств $\widehat{M}_N$ вытекает из соотношений

$$\widetilde{x} \in M_N \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{x} \in \widehat{M}_N \quad \Longleftrightarrow \quad \bigl\{\widetilde{x}(U^{*N}U^N) = 1,\, \widetilde{x}(U^{*N+1}U^{N+1}) = 0\bigr\}.$$

В свою очередь открытость множеств $\widehat{M}_N$ влечет замкнутость множества M_∞, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.6. Теорема 3.5 показывает, что пространство максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ в действительности зависит только от пары $(\mathscr{A}, \delta)$ и не зависит от выбора оператора U, задающего эндоморфизм δ (при выполнении условия (59)). Другими словами, если (M, Δ, α) – частичная динамическая система, у которой $\alpha(\Delta)$ – замкнутое множество, то пространство $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ зависит только от самой системы (M, Δ, α) и не зависит от выбора ее ковариантного представления $(\mathscr{A}, U)$ (см. п. 2.1 и определение 2.13).

Замечание 3.7. На самом деле доказанная теорема дает ключ к получению полного описания пространства $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ в общей ситуации (и без условия (59)). Действительно, если $U^*U \notin \mathscr{A}$, то можно рассмотреть C^*-алгебру $\mathscr{A}_1 = \langle \mathscr{A}, U^*U \rangle$, порожденную $\mathscr{A}$ и U^*U. Так как

$$\delta(U^*U) = UU^*UU^* = \delta(1)\delta(1) = \delta(1) \in \mathscr{A},$$

то мы имеем $\delta\colon \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}$. Применяя предыдущую теорему к алгебре $\mathscr{A}_1$ и оператору U, получаем полное описание пространства $M(\overline{E_*(\mathscr{A}_1)})$. Однако так как

$$\overline{E_*(\mathscr{A}_1)} = \overline{E_*(\mathscr{A})},$$

то мы имеем

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A}_1)}) = M(\overline{E_*(\mathscr{A})}).$$

Полученные результаты часто могут быть усилены (упрощены) в ситуациях, когда нам известны некоторые более специальные свойства частичной изометрии U. Например, если U является изометрией, т.е. $U^*U = 1$, то по предложению 2.9 отображение α, порожденное эндоморфизмом δ, является сюръекцией, следовательно, все множества $\widehat{M}_N$ пусты. Таким образом, мы получаем следствие из теоремы 3.5.

Следствие 3.8. *Пусть $A \subset L(H)$ является коммутативной C^*-алгеброй, содержащей единицу, и пусть U – изометрия такая, что $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ является эндоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$. Тогда отображение $\alpha\colon \Delta \to M(\mathscr{A})$, заданное формулой* (22), *является сюръекцией и пространство максимальных идеалов $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ алгебры $\overline{E_*(A)}$ имеет вид*

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_n,\ \alpha(x_{n+1}) = x_n,\ n \geqslant 0\bigr\}. \tag{62}$$

При этом фундаментальной системой окрестностей точки $\widetilde{x}$ является семейство множеств

$$O(a_1, \dots, a_k, n, \varepsilon) = \bigl\{\widetilde{y} \in M(\overline{E_*(A)}) : |a_i(x_n) - a_i(y_n)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\bigr\},$$

где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon > 0$ и $a_i \in \mathscr{A}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Замечание 3.9. Отметим, что если δ является автоморфизмом (т.е. в ситуации, когда $\Delta = M(\mathscr{A})$ и α – гомеоморфизм), то отображение $\Psi\colon M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) \to M(\mathscr{A})$ вида $\Psi(\widetilde{x}) = x_0$ задает гомеоморфизм между $M(\overline{E_*(\mathscr{A})})$ и $M(\mathscr{A})$.

Замечание 3.10. Подчеркнем также принципиальную связь между объектами, описанными в теореме 3.5, и пространствами, связанными с обратными (проективными) пределами последовательностей отображений. А именно, слагаемое M_∞ в правой части равенства (60) есть не что иное как пространство обратного (проективного) предела последовательности

$$M \xleftarrow{\alpha} \Delta_1 \xleftarrow{\alpha} \Delta_2 \xleftarrow{\alpha} \cdots . \tag{63}$$

В частности, если отображение α является сюръекцией, т.е. в ситуации, описанной в следствии 3.8, то мы имеем

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) = M_\infty = \varprojlim(M,\alpha),$$

где правая часть обозначает пространство обратного предела последовательности (63).

§ 4. Расширения динамических систем и эндоморфизмов алгебр

4.1. Расширение C^*-динамической системы. После того как в предыдущем параграфе мы получили описание пространства максимальных идеалов алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ уже легко можно получить и описание обратимого расширения динамической системы (M,Δ,α), отвечающей эндоморфизму δ (см. теорему 2.8). Это описание дано ниже в теореме 4.1. Для ее формулировки понадобятся следующие объекты, при определении которых мы используем обозначения теоремы 3.5:

$$\widetilde{M} := M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) = \bigcup_{N=0}^{\infty} \widehat{M}_N \cup M_\infty, \tag{64}$$

$$\widetilde{\Delta} := \{\widetilde{x} \in \widetilde{M} : x_0 \in \Delta\}, \tag{65}$$

$$\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\Delta} \to \widetilde{M}, \qquad \widetilde{\alpha}(x_0,x_1,\dots) := (\alpha(x_0),x_0,x_1,\dots), \tag{66}$$

где $(x_0,x_1,\dots) = \widetilde{x}$.

Отметим, что из формул (65) и (66) следует, что

$$\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}) = \{\widetilde{x} \in \widetilde{M} : x_0 \in \alpha(\Delta)\}. \tag{67}$$

Введем кроме этого сюръекцию $\Psi\colon \widetilde{M} \to M$ формулой

$$\Psi(\widetilde{x}) := x_0. \tag{68}$$

Из явного вида Δ и α следует, что отображение Ψ удовлетворяет условиям (19) и (20), т.е. Ψ осуществляет полусопряжение между $(\widetilde{M},\widetilde{\Delta},\widetilde{\alpha})$ и (M,Δ,α).

Теорема 4.1. *Пусть алгебра $\mathscr{A}$, оператор U и эндоморфизм δ те же, что в теореме 3.5, причем в терминах пространства максимальных идеалов M алгебры $\mathscr{A}$ эндоморфизм δ задается формулой (22). Тогда отображение δ: $\overline{E_*(\mathscr{A})} \to \overline{E_*(\mathscr{A})}$, $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$, является эндоморфизмом алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ (расширением эндоморфизма δ), при этом отображение $\delta_*\colon \overline{E_*(\mathscr{A})} \to \overline{E_*(\mathscr{A})}$, $\delta_*(\,\cdot\,) = U^*(\,\cdot\,)U$, также является эндоморфизмом алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ (обратным к δ).*

В терминах пространства $\widetilde{M}$ (64) *эндоморфизм* δ *задается формулой*

$$(\delta f)(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})), & \widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}, \\ 0, & \widetilde{x} \notin \widetilde{\Delta}, \end{cases} \tag{69}$$

где $f \in C(\widetilde{M})$, $\widetilde{\Delta}$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *заданы формулами* (65) *и* (66); *при этом* $\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\Delta} \to \widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta})$ *является гомеоморфизмом,* $\widetilde{\Delta}$ *и* $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta})$ *являются открыто-замкнутыми подмножествами в* $\widetilde{M}$; *а эндоморфизм* δ_* *задается формулой*

$$(\delta_* f)(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{\alpha}^{-1}(\widetilde{x})), & \widetilde{x} \in \widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}), \\ 0, & \widetilde{x} \notin \widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}), \end{cases} \tag{70}$$

где $f \in C(\widetilde{M})$, $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}) = \{\widetilde{x} \in \widetilde{M} : x_0 \in \alpha(\Delta)\}$ *и для* $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta})$ *отображение* $\widetilde{\alpha}^{-1}$ *имеет вид*

$$\widetilde{\alpha}^{-1}(x_0, x_1, \dots) = (x_1, \dots). \tag{71}$$

В частности, динамическая система $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$ *является обратимым расширением динамической системы* (M, Δ, α) *в смысле определения* 2.7, *где в качестве* Ψ *используется сюръекция* (68), *а* C^**-динамическая система* $(\overline{E_*(\mathscr{A})}, U)$ *является обратимым расширением* C^**-динамической системы* $(\mathscr{A}, U)$, *отвечающим динамической системе* $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$ *в смысле определения* 2.13.

Доказательство. Согласно предложению 1.7 отображения δ и δ_* являются эндоморфизмами алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$. Поэтому на основании теоремы 2.10 для завершения доказательства нам остается лишь установить, что в формуле (69) $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\alpha}$ действительно определяются формулами (65) и (66). Формулы (70) и (71) после этого получаются автоматически.

Согласно теореме 2.10 множество $\widetilde{\Delta}$, используемое в формуле (69), задается условием

$$\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{x} \in \widetilde{M} : \widetilde{x}(UU^*) = 1\}. \tag{72}$$

Из явного вида функционала $\widetilde{x}$ (см. (34)–(37)) и описания множества Δ, данного в теореме 2.8, следует, что

$$\widetilde{x}(UU^*) = 1 \iff x_0(UU^*) = 1 \iff x_0 \in \Delta.$$

Таким образом, множество $\widetilde{\Delta}$, заданное условием (72), совпадает с множеством, заданным условием (65).

Нам остается лишь показать, что в формуле (69) отображение $\widetilde{\alpha}$ имеет вид (66).

Заметим, что для $a \in \mathscr{A}$ и $n \geqslant 1$ выполняются равенства

$$\delta(\delta_*^n(a)) = UU^{*n}aU^nU^* = \delta(1)U^{*n-1}aU^{n-1}\delta(1) = \delta(1)\delta_*^{n-1}(a). \tag{73}$$

Зафиксируем произвольный функционал

$$\widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}, \qquad \widetilde{x} =: (x_0, x_1, \dots), \quad x_0 \in \Delta,$$

и положим

$$(y_0, y_1, \dots) := \widetilde{\alpha}(\widetilde{x}). \tag{74}$$

Вычислим y_n, $n = 0, 1, \dots$. Из явного вида y_n (формул (34)–(37), примененных к $\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})$), формул (69), (73) и явного вида x_n, $n = 0, 1, \dots$, мы получаем следующие равенства для $a \in \mathscr{A}$ и $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} y_n(a) &= \delta_*^n(a)(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})) = \delta(\delta_*^n(a))(\widetilde{x}) = \bigl(\delta(1)\delta_*^{n-1}(a)\bigr)(\widetilde{x}) \\ &= \delta(1)(\widetilde{x})\delta_*^{n-1}(a)(\widetilde{x}) = \delta_*^{n-1}(a)(\widetilde{x}) = a(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Значит, $y_n = x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Используя явный вид y_0 и опять применяя формулу (69), мы имеем для любого $a \in \mathscr{A}$

$$a(y_0) = a(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})) = \delta(a)(\widetilde{x}) = \delta(a)(x_0) = a(\alpha(x_0)),$$

где в последнем равенстве использована формула (22).

Таким образом, $y_0 = \alpha(x_0)$.

Итак, явный вид отображения $\widetilde{\alpha}$ в формуле (69) установлен и доказательство теоремы завершено.

До настоящего момента мы предполагали (в теоремах 3.5 и 4.1) существование оператора U, задающего эндоморфизм δ, т.е. мы предполагали существование C^*-динамической системы $(\mathscr{A}, U)$, отвечающей динамической системе (M, Δ, α). При этом, как показывает теорема 3.5, при выполнении условия $U^*U \in \mathscr{A}$ (59) пространство максимальных идеалов алгебры $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ – расширения алгебры $\mathscr{A}$ – в действительности не зависит от выбора оператора U (если таковой существует). В терминах динамической системы (M, Δ, α) условие $U^*U \in \mathscr{A}$ означает просто, что множество $\alpha(\Delta)$ является открытым (а следовательно, и открыто-замкнутым). Возникает естественный вопрос: всегда ли существует C^*-динамическая система $(\mathscr{A}, U)$, отвечающая заданной динамической системе (M, Δ, α)?

Приведенная ниже простая конструкция показывает, что если множество $\alpha(\Delta)$ является открытым, то существует C^*-динамическая система $(\mathscr{B}, U)$, отвечающая описанному в теореме 4.1 обратимому расширению $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$ динамической системы (M, Δ, α) и такая, что ее подсистема $(\mathscr{A}, U)$ отвечает динамической системе (M, Δ, α).

4.2. Представление расширения C^*-динамической системы, отвечающей расширению динамической системы. Пусть (M, Δ, α) – частичная динамическая система такая, что $\alpha(\Delta)$ – открытое множество, и $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$ – ее обратимое расширение, в котором $\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\alpha}$ заданы соответственно формулами (64), (65) и (66), а полусопряжение Ψ задано формулой (68). Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\widetilde{M})$ (меру на $\widetilde{M}$ полагаем дискретной, равной единице для каждой точки). В пространстве $l^2(\widetilde{M})$ зададим точное представление алгебры $\mathscr{B} := C(\widetilde{M})$ операторами умножения на функции $a \in C(\widetilde{M})$. Пусть $U \colon l^2(\widetilde{M}) \to l^2(\widetilde{M})$ – частичная изометрия, заданная формулой

$$(Uf)(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x})), & \widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}, \\ 0, & \widetilde{x} \notin \widetilde{\Delta}. \end{cases} \tag{75}$$

Из этой формулы вытекает, что

$$UaU^* = \delta(a), \quad U^*aU = \delta_*(a), \qquad a \in \mathscr{B},$$

где δ и δ_* задаются формулами (69) и (70) соответственно.

Рассмотрим подалгебру $\mathscr{A} \subset B$, состоящую из функций, зависящих только от первой координаты x_0 точки $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, т.е. $\mathscr{A} = \{a \in C(\widetilde{M}) : a(\widetilde{x}) = a(x_0)\}$, где $(x_0, x_1, \dots) = \widetilde{x} \in \widetilde{M}$. Ясно, что $M(\mathscr{A}) = M$. Из формул (65), (66) и определения оператора U вытекает, что

$$U(\,\cdot\,)U^*\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \qquad UaU^* = \delta(a), \quad a \in \mathscr{A},$$

где $\delta\colon C(M) \to C(M)$ имеет вид (11). Более того, оператор $U^*U \in \mathscr{A}$ является проектором, отвечающим характеристической функции множества $\alpha(\Delta)$.

Таким образом, C^*-динамическая система $(\mathscr{B}, U)$ является расширением C^*-динамической системы $(\mathscr{A}, U)$, отвечающим обратимому расширению $(\widetilde{M}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\alpha})$ динамической системы (M, Δ, α).

Замечание 4.2. 1) Из проведенных рассмотрений вытекает, в частности, что условие "$\alpha(\Delta)$ является открытым множеством" является необходимым и достаточным условием существования C^*-динамической системы $(\mathscr{A}, U)$, отвечающей динамической системе (M, Δ, α) и, кроме того, обладающей свойством $U^*U \in \mathscr{A}$.

2) Более подробное описание внутренней структуры и свойств расширений динамических и C^*-динамических систем и, в частности, анализ свойств операторов $U^{*n}U^n$ можно найти в [9].

3) На базе описанного здесь метода построения обратимых расширений динамических систем в [4] разработана конструкция скрещенного произведения, порожденного эндоморфизмами коммутативных C^*-алгебр.

§ 5. Примеры

В данном параграфе мы приведем несколько примеров, вскрывающих связь алгебр, исследованных в настоящей статье, с рядом классических объектов теории динамических систем. Эти примеры в действительности содержат только алгебры, описываемые с помощью M_∞, т.е. далеко не исчерпывают даже типичные естественно возникающие в процессе обратимого расширения C^*-алгебры (пространство максимальных идеалов которых согласно теореме 3.5 может содержать еще счетное число слагаемых других типов).

Как уже было отмечено (см. замечание 3.10), множество M_∞ по сути совпадает с пространством обратного предела соответствующей последовательности отображений. Описанию пространств подобного типа посвящены многочисленные исследования; большое количество результатов на эту тему можно найти, например, в [9]–[18], помимо этого на базе развитой в настоящей работе техники в [19] получено описание обратимых расширений унимодальных отображений отрезка.

В приведенных ниже примерах важно, прежде всего, то, что мы получаем по-существу некоторое описание пространств максимальных идеалов и C^*-динамических систем, являющихся обратимыми расширениями исходных необратимых систем.

Всюду в этом параграфе динамические системы будут заданы на всем пространстве, поэтому мы их будем обозначать парами типа (M, α), а не тройками типа (M, M, α).

Пример 5.1 (топологическая марковская цепь). Напомним конструкцию топологической марковской цепи. Пусть $A = (A(i,j))_{i,j\in\{1,\dots,N\}}$ – квадратная матрица, коэффициенты которой являются элементами множества $\{0,1\}$, причем матрица A не содержит нулевых строк. С матрицей A мы свяжем две динамические системы: (X_A, σ_A) и $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$.

Односторонний марковский сдвиг σ_A действует на компактном пространстве

$$X_A = \bigl\{x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{1,\dots,N\}^{\mathbb{N}} : A(\xi_k, \xi_{k+1}) = 1,\, k \in \mathbb{N}\bigr\}$$

(топология на X_A индуцирована с канторовского пространства $\{1,\dots,N\}^{\mathbb{N}}$) по правилу

$$(\sigma_A x)_k = \xi_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad x \in X_A. \tag{76}$$

Отображение σ_A является сюръекцией тогда и только тогда, когда у матрицы A нет нулевых столбцов.

Двусторонний марковский сдвиг $\overline{\sigma}_A$ действует на компактном пространстве

$$\overline{X}_A = \bigl\{(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \{1,\dots,N\}^{\mathbb{Z}} : A(\xi_k, \xi_{k+1}) = 1,\, k \in \mathbb{Z}\bigr\}$$

по правилу

$$(\overline{\sigma}_A x)_k = \xi_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \overline{X}_A. \tag{77}$$

Динамические системы (X_A, σ_A) и $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$ также называются *топологическими марковскими цепями.*

Предложение 5.2. *Пусть у матрицы A нет нулевых столбцов, и пусть $(\widetilde{X}_A, \widetilde{\sigma}_A)$ – обратимое расширение динамической системы (X_A, σ_A), описанное в теореме 4.1. Тогда*

$$(\widetilde{X}_A, \widetilde{\sigma}_A) \cong (\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A).$$

Доказательство. Так как у матрицы A нет нулевых столбцов, то отображение σ_A является сюръекцией, и, значит, в терминах теоремы 3.5 мы имеем $\widetilde{X} = X_\infty$ (при этом $U^*U = 1$). Таким образом,

$$\widetilde{X} = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots),\, x_i \in X_A,\, \sigma_A(x_i) = x_{i-1},\, i = 1, 2, \dots\bigr\}.$$

Из формулы (76) вытекает, что условие

$$\sigma_A(x) = y, \qquad x, y \in X_A,$$

означает попросту, что

$$x = (\xi_0, \xi_1, \dots), \qquad y = (\xi_1, \xi_2, \dots),$$

где $A(\xi_k, \xi_{k+1}) = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, элементу

$$\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X}$$

соответствует единственная последовательность

$$(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}},$$

где $x_i = (\xi_k)_{k=-i,\dots,+\infty}$, $i = 0, 1, \dots$, и $A(\xi_k, \xi_{k+1}) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $\widetilde{X} \subset \overline{X}_A$. Понятно также, что любая последовательность $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \overline{X}_A$ указанным выше способом однозначно задает последовательность $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \widetilde{X}$. Таким образом, $\widetilde{X} = \overline{X}_A$.

В силу формулы (66) отображение $\widetilde{\sigma}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ в нашем случае принимает вид

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{x}) = (\sigma_A(x_0), x_0, x_1, \dots), \qquad \widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots). \tag{78}$$

С учетом указанного выше отождествления между $\widetilde{X}$ и $\overline{X}_A$ формула (78) превращается в формулу

$$\widetilde{\sigma}(x)_k = \xi_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \overline{X}_A,$$

т.е. совпадает с формулой (77). Доказательство завершено.

Замечание 5.3. Описание обратимых расширений топологических марковских цепей, задаваемых матрицами, у которых могут быть нулевые столбцы, приведено в [9].

Пример 5.4 (подкова Смейла и пространство максимальных идеалов алгебры, отвечающей обратимому расширению топологической марковской цепи). В предыдущем примере мы описали обратимое расширение топологической марковской цепи (которое натуральным образом совпало с обратимой топологической марковской цепью). Это описание не носит явного геометрического характера. Возникает вопрос: можно ли появляющиеся здесь при процедуре расширения топологические пространства и динамические системы описать "более явным" геометрическим образом? Как будет показано в этом примере, эти объекты тесным образом связаны с отображениями типа подковы Смейла. Напомним эту конструкцию, которая была введена С. Смейлом в 1965 г. при построении первого примера структурно устойчивого диффеоморфизма (названного "подковным отображением"), имеющего бесконечное множество периодических точек (см., например, [10; гл. 4]).

Подковное отображение h растягивает и сгибает единичный квадрат S в фигуру типа подковы в соответствии со следующим правилом. Сначала равномерно сжимается S в вертикальном направлении с коэффициентом сжатия $\eta < 1/2$, затем растягивается в горизонтальном направлении с коэффициентом растяжения $1/\eta > 2$ и, наконец, сгибается и получаются два прямоугольника в пересечении подковы $h(S)$ и S, как показано на рис. 1.

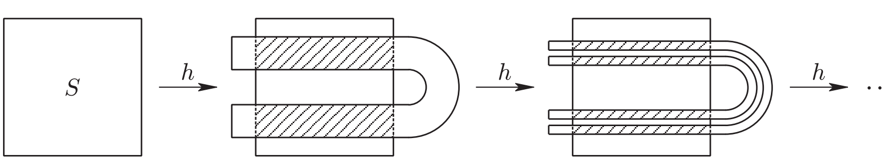

Рис. 1. Итерации образов единичного квадрата S при подковном отображении h

Множество $h^n(S) \cap S$ состоит из 2^n прямоугольников высоты η^n (см. рис. 1), следовательно, множество $H^+ := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(S)$ является произведением единичного интервала (в горизонтальном направлении) на множество канторовского типа (в вертикальном направлении). Подобным же образом, используя прообразы (рис. 2), мы получаем, что множество $H^- := \bigcap_{n=1}^{\infty} h^{-n}(S)$ является произведением единичного интервала (вертикального) и множества канторовского типа (горизонтального).

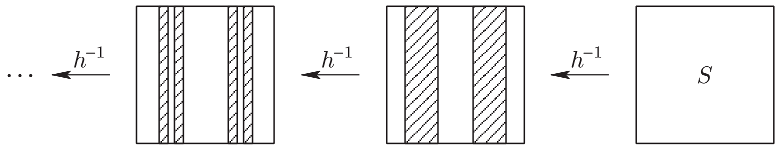

Рис. 2. Итерации прообразов единичного квадрата S при подковном отображении h

Подковное множество $H := H^+ \cap H^- = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} h^n(S)$ является множеством канторовского типа. Подковное отображение $h\colon H \to H$ является гомеоморфизмом, более того, можно закодировать точки множества H двусторонними последовательностями из нулей и единиц таким образом, что h становится двусторонним сдвигом (рис. 3).

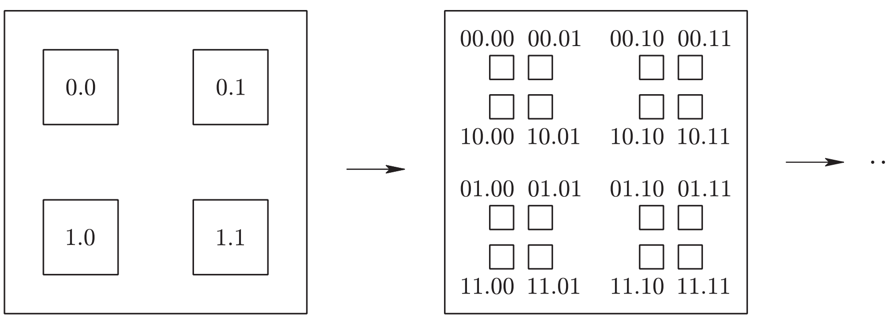

Рис. 3. Кодировка точек подковного множества H

Иными словами, “подковная” динамическая система (H, h) и обратимая топологическая марковская цепь $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$, где $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, являются топологически сопряженными.

Итак, мы получаем геометрическую иллюстрацию предложения 5.2. В частности, так как динамическая система $(\mathscr{C}, f)$, где $\mathscr{C}$ – стандартное множество Кантора на единичном отрезке, а $f(x) := 3x \pmod 1$, $x \in \mathscr{C}$, эквивалентна односторонней топологической марковской цепи (X_A, σ_A) с выписанной выше матрицей A, то, вспоминая теорему 4.1, мы заключаем, что

подковная динамическая система (H, h) *является обратимым расширением динамической системы* $(\mathscr{C}, f)$, *а само подковное множество* H *является пространством максимальных идеалов алгебры, отвечающей обратимому расширению соответствующей* C^**-динамической системы.*

Замечание 5.5. В различных динамических системах могут появляться различные типы подковных отображений (которые, по нашему мнению, естественно называть *отображениями типа змеевика*). Применяя описанную выше процедуру, можно получать соответствующие различные описания обратимых расширений топологических марковских цепей и отвечающих им C^*-динамических систем (рис. 4; см. [10]).

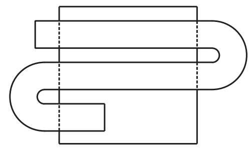

Рис. 4. Образ единичного квадрата в геометрическом представлении обратимой топологической марковской цепи $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$, заданной матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Пример 5.6 (n-адический соленоид). Завершим наши примеры рассмотрением расширений динамических систем, приводящих к n-адическим соленоидам.

Напомним конструкцию этих объектов. Зафиксируем $n = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность и $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ – единичный диск. *n-адический соленоид* $\mathscr{S}_n$ определяется как аттрактор отображения F_n, действующего на твердом торе $\mathscr{T} = S^1 \times D^2$ по формуле

$$F_n(z_1, z_2) = \left(z_1^n,\ \lambda z_2 + \frac{n-1}{n}\, z_1\right),$$

где $0 < \lambda < 1/n$ – фиксированное число. По сути образ F_n – это твердый тор, накрученный на себя n раз и вписанный в $\mathscr{T}$. Из определения следует, что n-адический соленоид – это множество

$$\mathscr{S}_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_n^k(\mathscr{T}).$$

Локально соленоид является призведением интервала на множество канторовского типа. Соленоидное отображение $F_n\colon \mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_n$ является гомеоморфизмом. Пусть $p\colon \mathscr{T} \to S^1$ – проекция на первую координату: $p(z_1, z_2) = z_1$. Известно (см., например, [11; раздел 1.9]), что отображение

$$\mathscr{S}_n \ni s \longmapsto \bigl(p(s), p(F^{-1}(s)), \dots, p(F^{-k}(s)), \dots\bigr) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} S^1$$

устанавливает топологическое сопряжение между $(\mathscr{S}_n, F_n)$ и динамической системой, состоящей из обратного предела $\varprojlim(S^1, g_n)$ по отношению к наматывающему отображению $g_n(z) = z^n$, $z \in S^1$, и соответствующего индуцированного гомеоморфизма. Другими словами, в силу теорем 3.5 и 4.1

n-адический соленоид $\mathscr{S}_n$ вместе с отображением F_n представляет собой обратимое расширение динамической системы (S^1, g_n), где $g_n(z) = z^n$, $z \in S^1$, а сам соленоид $\mathscr{S}_n$ является пространством максимальных идеалов алгебры, отвечающей обратимому расширению соответствующей C^*-динамической системы.

Заканчивая рассмотрение данного примера, выпишем в явном виде C^*-динамическую систему, расширение которой приводит к соленоиду.

Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$, и пусть алгебра $\mathscr{A} \subset L(H)$ состоит из операторов умножения на периодические функции с периодом 2π. Отождествляя натуральным образом пространство $\mathbb{R} \pmod{2\pi}$ с единичной окружностью $C(S^1)$, мы получаем изоморфизм $\mathscr{A} \cong C(S^1)$. Введем в рассмотрение унитарный оператор $U \in L(H)$:

$$(Uf)(x) = \sqrt{2}\, f(2x), \qquad (U^*f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Для операторов $a \in \mathscr{A}$ получаем, что UaU^* – оператор умножения на $a(2x)$, а U^*aU – оператор умножения на $a(x/2)$. Таким образом, $U\mathscr{A}U^* \subset \mathscr{A}$ и $U^*\mathscr{A}U \nsubseteq \mathscr{A}$, причем, используя комплексную запись переменной на S^1, мы имеем

$$UaU^*(z) = a(z^2), \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Эта формула вместе с вышеприведенными рассмотрениями и теоремой 4.1 приводит к следующему результату, описывающему обратимое расширение C^*-динамической системы $(\mathscr{A}, U)$.

Предложение 5.7. *Пусть $(\mathscr{A}, U)$ – введенная выше C^*-динамическая система и $(\overline{E_*(\mathscr{A})}, U)$ – ее обратимое расширение, описанное в теореме 4.1. Тогда*

$$M(\overline{E_*(\mathscr{A})}) \cong C(\mathscr{S}_2)$$

и на алгебре $\overline{E_*(\mathscr{A})}$ автоморфизм $U(\,\cdot\,)U^*$ задается соленоидным отображением F_2, т.е.

$$UbU^* = b \circ F_2, \qquad b \in \overline{E_*(\mathscr{A})}.$$

Список литературы

[1] А. В. Лебедев, А. Одзиевич, “Расширения C^*-алгебр частичными изометриями”, *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 37–70; англ. пер.: A. V. Lebedev, A. Odzijewicz, “Extensions of C^*-algebras by partial isometries”, *Sb. Math.*, **195**:7 (2004), 951–982.

[2] С. В. Попович, Т. Ю. Майстренко, “C^*-алгебры, ассоциированные с $\mathscr{F}_{2^n}$ унимодальными динамическими системами”, *Укр. матем. журн.*, **53**:7 (2001), 929–938; англ. пер.: S. V. Popovych, T. Yu. Maistrenko, “C^*-algebras associated with $\mathscr{F}_{2^n}$ unimodal dynamical systems”, *Ukrainian Math. J.*, **53**:7 (2001), 1106–1115.

[3] A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *Crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators*, `arXiv: math/0502415`.

[4] B. K. Kwaśniewski, “Covariance algebra of a partial dynamical system”, *Cent. Eur. J. Math.*, **3**:4 (2005), 718–765.

[5] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *Crossed product by an arbitrary endomorphism*, `arXiv: math/0703801`.

[6] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *Maximal ideal space of a commutative coefficient algebra*, `arXiv: math/0311416`.

[7] С. Ло, *Операторы взвешенного сдвига в некоторых банаховых пространствах функций*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Минск, 1981.

[8] Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974; пер. с фр.: J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Cahiers scientifiques, **29**, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[9] B. K. Kwaśniewski, *On systems generalizing inverse limits for partial mappings*, **09**, Institute of Mathematics, Bialystok University, 2007.

[10] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

[11] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[12] J. E. Anderson, I. F. Putnam, "Topological invariants for substitution tilings and their associated C^*-algebras", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18**:3 (1998), 509–537.

[13] M. Barge, J. Jacktlich, G. Vago, "Homeomorphisms of one-dimensional inverse limits with applications to substitution tilings, unstable manifolds, and tent maps", *Geometry and topology in dynamics* (Winston-Salem, NC, 1998/San Antonio, TX, 1999), Contemp. Math., **246**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 1–15.

[14] M. Barge, W. T. Ingram, "Inverse limits on $[0,1]$ using logistic bonding maps", *Topology Appl.*, **72**:2 (1996), 159–172.

[15] J. T. Rogers, jr., "On mapping indecomposable continua onto certain chainable indecomposable continua", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**:2 (1970), 449–456.

[16] W. Th. Watkins, "Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps", *Pacific J. Math.*, **103**:2 (1982), 589–601.

[17] R. F. Williams, "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6**:4 (1967), 473–487.

[18] I. Yi, "Canonical symbolic dynamics for one-dimensional generalized solenoids", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:9 (2001), 3741–3767.

[19] B. K. Kwaśniewski, "Inverse limit systems associated with $\mathscr{F}_{2^n}$ zero Schwarzian unimodal maps", *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódz Sér. Rech. Déform.*, **55** (2005), 83–109.

[20] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: Z. Nitecki, *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*, MIT Press, Cambridge, MA–London, 1971.

Б. К. Квасневски (B. K. Kwaśniewski)
Institute of Mathematics, University of Bialystok, Poland
E-mail: bartoszk@math.uwb.edu.pl

Поступила в редакцию
31.10.2007

А. В. Лебедев (A. V. Lebedev)
Белорусский государственный университет, г. Минск;
Institute of Mathematics, University of Bialystok, Poland
E-mail: lebedev@bsu.by