УДК 517.9

А. В. Лебедев, А. Одзиевич

Расширения C^*-алгебр частичными изометриями

В статье изучается структура C^*-алгебры, порожденной некоторой $*$-алгеброй $\mathscr{A}$ и частичной изометрией, индуцирующей эндоморфизм $\mathscr{A}$.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Введение

C^*-алгебры, ассоциированные с автоморфизмами (эндоморфизмами), играют важную роль в различных областях математики, в математической физике (см., например, [1]–[6]) и, в частности, в квантовой оптике (см. [7], [8]). В настоящий момент теория C^*-алгебр, ассоциированных с автоморфизмами, развита в очень высокой степени (в связи с этим еще раз упомянем [2]). С другой стороны, теория C^*-алгебр, ассоциированных с эндоморфизмами, еще не приняла "окончательной" формы, хотя прогресс в этом направлении идет очень быстро. Основные достижения здесь получены в предположении, что эндоморфизм C^*-алгебры порождается *изометрией* (см., например, [9], [10] и цитируемые в этих работах источники). Однако в действительности наиболее естественной ситуацией является такая, при которой эндоморфизм генерируется *частичной изометрией*. Значительное продвижение в исследованиях алгебр, ассоциированных с частичными изометриями, было получено после появления фундаментальной работы [11], в которой введено частичное скрещенное произведение алгебры и частичного действия группы $\mathbb{Z}$. Дальнейшее развитие этой конструкции осуществлено в [12] (для случая произвольной дискретной группы) и в [13] (для случая инверсной полугруппы); плодотворное и глубокое обсуждение этих и подобных объектов можно также найти в [14].

Необходимо, однако, отметить, что алгебры, ассоциированные с частичными действиями групп, *не являются* полным обобщением алгебр, ассоциированных с эндоморфизмами, порожденными изометриями (соответствующие классы алгебр пересекаются, но ни один из них не содержит другой). В настоящей работе исследуется класс алгебр, который охватывает как изометрическую, так и частично изометрическую ситуацию (для случая группы $\mathbb{Z}$). Следует также подчеркнуть, что *универсальные* конструкции (типа скрещенных произведений) не всегда дают исчерпывающую информацию для изучения *конкретных* ковариантных алгебр, появляющихся в приложениях. Именно конкретные примеры ковариантных алгебр, возникающих при формализации задач квантовой оптики (см. § 6), и послужили стимулирующим толчком для введения и исследования объектов, представленных в настоящей работе.

Работа выполнена при частичной поддержке KBN (грант № 2 PO3 A 012 19).

Статья организована следующим образом.

Во втором параграфе приведены основные результаты, описывающие структуру C^*-алгебры $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{A}, U)$, порожденной $*$-алгеброй $\mathscr{A} \subset L(H)$ и частичной изометрией $U \in L(H)$ такой, что отображение

$$\mathscr{A} \ni a \mapsto UaU^*$$

является эндоморфизмом $\mathscr{A}$. Это описание получено в предположении, что $\mathscr{A}$ и U удовлетворяют следующим трем условиям:

$$\begin{aligned} Ua &= UaU^*U, \qquad && a \in \mathscr{A}; \\ UaU^* &\in \mathscr{A}, && a \in \mathscr{A}; \\ U^*aU &\in \mathscr{A}, && a \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Алгебры $\mathscr{A}$, обладающие такими свойствами, мы называем *алгебрами коэффициентов* (для $\mathscr{B}$).

Показано, что любой элемент из $\mathscr{B}$ может быть представлен в виде ряда типа Фурье с коэффициентами из $\mathscr{A}$ (теоремы 2.8, 2.15). Кроме того, доказана теорема об изоморфизме (теорема 2.13), устанавливающая "единственность внутренней структуры" алгебры $\mathscr{B}$ при наличии в этой алгебре свойства $(*)$ (см. 2.6).

В третьем параграфе дано описание конструкции алгебр коэффициентов по "начальным" алгебрам, не являющимся алгебрами коэффициентов. Далее в четвертом параграфе приведена соответствующая конструкция для случая *коммутативной* алгебры коэффициентов.

В пятом параграфе обсуждается связь объектов, рассматриваемых в настоящей работе, с алгебрами, ассоциированными с частичными действиями группы $\mathbb{Z}$. Здесь показано, что класс алгебр, изучаемый в статье, включает в себя ковариантные алгебры, ассоциированные с частичным действием группы $\mathbb{Z}$.

Наконец, в последнем параграфе (§ 6) рассмотрены два примера C^*-алгебр исследуемого типа. Первый пример связан с полярным разложением оператора, а второй – с проблемами, возникающими в квантовой оптике.

В связи с предметом нашей статьи необходимо также отметить работу [15], в которой рассмотрен частный случай исследуемой здесь алгебры, имеющий отношение к полярному разложению оператора (ср. § 6, пример 1).

§ 2. Расширения $*$-алгебр частичными изометриями. Теорема об изоморфизме

В этом параграфе мы фиксируем $*$-алгебру $\mathscr{A} \subset L(H)$, содержащую единицу алгебры $L(H)$ линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, и описываем C^*-расширения алгебры $\mathscr{A}$, ассоциированные с отображениями

$$\delta(x) = UxU^*, \qquad \delta_*(x) = U^*xU, \qquad x \in L(H), \tag{1}$$

где $U \in L(H)$, $U \neq 0$.

Ясно, что δ и δ_* являются линейными непрерывными ($\|\delta\| = \|\delta_*\| = \|U^2\|$) преобразованиями $L(H)$ и $\delta(x^*) = \delta(x)^*$, $\delta_*(x^*) = \delta_*(x)^*$. Пользуясь степенями δ^k и δ_*^k, $k = 0, 1, 2, \dots$, мы будем полагать для удобства $\delta^0(x) = \delta_*^0(x) = x$.

Заметим, что если отображение $\delta\colon \mathscr{A} \to L(H)$ является морфизмом, то

$$UU^* = \delta(1) = \delta(1^2) = \delta^2(1) = (UU^*)^2$$

и, следовательно, оператор U является частичной изометрией. По этой причине частичные изометрии играют основную роль в предмете настоящей работы.

Замечание. Если U является *изометрией* (т.е. $U^*U = 1$), то для *любой* алгебры $\mathscr{A}$ отображение $\delta\colon \mathscr{A} \to L(H)$ является морфизмом, так как для каждой пары элементов $a, b \in \mathscr{A}$ выполняется

$$\delta(ab) = UabU^* = UaU^*UbU^* = \delta(a)\delta(b).$$

Напомним, что линейный ограниченный оператор U, действующий в гильбертовом пространстве H, называется частичной изометрией, если существует замкнутое подпространство $H_1 \subset H$ такое, что

$$\begin{aligned} \|U\xi\| &= \|\xi\|, \qquad \xi \in H_1, \\ U\xi &= 0, \qquad \xi \in H \ominus H_1. \end{aligned}$$

Подпространство H_1 называется *начальным* пространством для U, а подпространство $U(H_1)$ называется *финальным* пространством для U.

Замечание 2.1. Ниже приведены известные эквивалентные характеристические свойства частичной изометрии:

1) U является частичной изометрией,
2) U^* является частичной изометрией,
3) U^*U является проектором (на начальное пространство U),
4) UU^* является проектором (на финальное пространство U),
5) $UU^*U = U$ и $U^*UU^* = U^*$

(см., например, [16; задача 98]).

Мы будем исследовать C^*-алгебру $\mathscr{B} := \mathscr{B}(\mathscr{A}, U)$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$ и U, предполагая дополнительно, что $\mathscr{A}$ является *алгеброй коэффициентов* для $\mathscr{B}$; под этим мы подразумеваем, что $\mathscr{A}$ обладает следующими тремя свойствами:

$$Ua = \delta(a)U, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{2}$$

$$\delta(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \tag{3}$$

$$\delta_*(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}. \tag{4}$$

Алгебры, обладающие этими свойствами, действительно играют роль “коэффициентов” в $\mathscr{B}(\mathscr{A}, U)$ (это показано в предложении 2.4). В §3 мы обсудим способы построения алгебры, удовлетворяющей условиям (2), (3) и (4), по “начальной” алгебре, которая удовлетворяет лишь некоторым из этих условий или даже не удовлетворяет ни одному из них.

Заметим, что свойство (2) эквивалентно свойству

$$aU^* = U^*\delta(a), \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{5}$$

что может быть установлено переходом к сопряженным операторам.

Следующее полезное наблюдение показывает, что свойство (2) также может быть записано иным способом.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathscr{A}$ является $*$-подалгеброй $L(H)$, $1 \in \mathscr{A}$ и $U \in L(H)$, тогда следующие три условия эквивалентны*:

(i) *$\mathscr{A}$ и U удовлетворяют условию* (2);

(ii) *U является частичной изометрией и*

$$U^*U \in \mathscr{A}', \tag{6}$$

где $\mathscr{A}'$ – коммутант $\mathscr{A}$;

(iii) *$U^*U \in \mathscr{A}'$ и $\delta\colon \mathscr{A} \to \delta(\mathscr{A})$ является морфизмом.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть выполнено условие (2) (и, следовательно, выполнено (5)). Полагая в (2) $a = 1$, получаем $U = \delta(1)U = UU^*U$. Таким образом, U – частичная изометрия. Умножая (2) на U^* слева и применяя (5), имеем

$$U^*Ua = U^*\delta(a)U = aU^*U.$$

Значит, $U^*U \in A'$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Так как U – частичная изометрия и $U^*U \in A'$, то для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ получаем

$$Ua = UU^*Ua = UaU^*U = \delta(a)U,$$

т.е. (2) верно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Достаточно показать, что

$$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b), \qquad a, b \in \mathscr{A}.$$

Используя тот факт, что U – частичная изометрия и $U^*U \in \mathscr{A}'$, получаем

$$\delta(ab) = UabU^* = UU^*UabU^* = UaU^*UbU^* = \delta(a)\delta(b).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Так как δ является морфизмом и $1 \in \mathscr{A}$, то

$$UU^* = \delta(1) = \delta(1^2) = \delta(1)\delta(1) = (UU^*)^2,$$

т.е. U – частичная изометрия.

Доказательство завершено.

Из предложения 2.2 следует, что в данном выше определении алгебры коэффициентов можно заменить условие (2), например, условием (6) и предположением, что U – частичная изометрия.

Замечание 2.3. Отметим, что если U – изометрия, то условие (i), а значит, и (ii) выполнено для любой алгебры $\mathscr{A}$.

Теперь мы приведем первый важный результат о структуре алгебры $\mathscr{B}$.

Предложение 2.4. *Пусть $\mathscr{A}$ и U удовлетворяют условиям* (2), (3) *и* (4). *Тогда векторное пространство $\mathscr{B}_0$, состоящее из конечных сумм*

$$x = U^{*N}a_{\mathbb{N}} + \cdots + U^{*}a_{\overline{1}} + a_0 + a_1U + \cdots + a_NU^N, \tag{7}$$

где $a_k, a_{\overline{l}} \in \mathscr{A}$ и $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является плотной $*$-подалгеброй C^*-алгебры $\mathscr{B}$.

Доказательство. Ясно, что если $b \in \mathscr{B}_0$, то $b^* \in \mathscr{B}_0$. Проверим, что $\mathscr{B}_0$ – алгебра.

Непосредственные вычисления, использующие (2), (3) и (4), показывают, что для произведения

$$aU^kU^{*l}b, \qquad a, b \in \mathscr{A},$$

справедливы следующие соотношения:

1) $k \leqslant l$: $aU^kU^{*l}b = U^{*l-k}\delta^{l-k}(a)\delta^l(1)b \in U^{*l-k}\mathscr{A}$;
2) $k \geqslant l$: $aU^kU^{*l}b = a\delta^k(1)\delta^{k-l}(b)U^{k-l} \in \mathscr{A}U^{k-l}$.

А для произведения

$$U^kaU^{*l}, \qquad a \in \mathscr{A},$$

справедливы следующие соотношения:

1) $k \leqslant l$: $U^kaU^{*l} = U^{*l-k}\delta^l(a) \in U^{*l-k}\mathscr{A}$;
2) $k \geqslant l$: $U^kaU^{*l} = \delta^k(a)U^{k-l} \in \mathscr{A}U^{k-l}$.

Из этих соотношений и свойств (2), (3) и (4) вытекает, что $\mathscr{B}_0$ – алгебра.

Теперь пусть $\mathscr{B}_f$ – алгебра всех конечных алгебраических комбинаций операторов U^k, U^{*l}, $k, l \in \mathbb{N}$, и элементов алгебры $\mathscr{A}$. Очевидно,

$$\overline{\mathscr{B}}_f = \mathscr{B}.$$

Но из вышеприведенных соотношений вытекает равенство $\mathscr{B}_f = \mathscr{B}_0$, что и завершает доказательство.

Замечание 2.5. Если в дополнение к предположениям предложения 2.4 мы допустим выполнение равенства

$$U^*a = \delta_*(a)U^* \quad \Leftrightarrow \quad aU = U\delta_*(a) \tag{8}$$

для $a \in \mathscr{A}$ (т.е. мы предполагаем, что δ_* также удовлетворяет условию (2)), то в доказанном утверждении подалгебра $\mathscr{B}_0$ будет совпадать с пространством конечных сумм вида

$$x = a_{\overline{N}}U^{*N} + \cdots + a_{\overline{1}}U^* + a_0 + a_1U + \cdots + a_NU^N. \tag{9}$$

Такая модификация возможна вследствие того, что в силу (8) можно поставить коэффициенты $a_{\overline{k}}$ перед операторами U^{*k}.

Заметим, что, используя равенства $U^k = U^k U^{*k} U^k$ и $U^{*k} = U^{*k} U^k U^{*k}$ (см. предложение 3.6), мы всегда можем выбрать коэффициенты a_k и $a_{\overline{l}}$ в (7) таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$a_k U^k U^{*k} = a_k, \qquad U^k U^{*k} a_{\overline{k}} = a_{\overline{k}}. \tag{10}$$

Однако предположение о том, что $a_k, a_{\overline{k}} \in \mathscr{A}$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяют (10), еще не гарантирует единственности разложения (7). Однозначность коэффициентов в этом разложении будет получена далее в теоремах 2.8, 2.15 в ситуации, когда алгебра $\mathscr{B}_0$ обладает свойством $(*)$, описываемым ниже.

Определение 2.6. Мы будем говорить, что алгебра $\mathscr{B}_0$ обладает *свойством* $(*)$, если для любого элемента $x \in \mathscr{B}_0$ вида (7) выполняется неравенство

$$\|a_0\| \leqslant \|x\|. \tag{$*$}$$

Предложение 2.7. *Пусть* $\mathscr{B}_0$ – *алгебра, рассмотренная в предложении* 2.4. *Если* $\mathscr{B}_0$ *обладает свойством* $(*)$ *и коэффициенты элемента* $x \in \mathscr{B}_0$ *удовлетворяют* (10), *то*

$$\begin{aligned} \|a_k\| &\leqslant \|x\|, \\ \|a_{\overline{k}}\| &\leqslant \|x\| \end{aligned} \tag{11}$$

для $k, l \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для элементов $U^k x$ компоненты “нулевого порядка” имеют вид

$$(U^k x)_0 = U^k U^{*k} a_{\overline{k}}. \tag{12}$$

Так как $\|U^k\| \leqslant 1$, то

$$\|x\| \geqslant \|U^k x\|. \tag{13}$$

В свою очередь, из (12), (13) и свойства $(*)$ следует, что

$$\|x\| \geqslant \|U^k x\| \geqslant \|(U^k x)_0\| = \|U^k U^{*k} a_{\overline{k}}\| = \|a_{\overline{k}}\|. \tag{14}$$

Так как $\|x\| = \|x^*\|$, то, применяя неравенство (14) к элементу x^*, получаем

$$\|x\| = \|x^*\| \geqslant \|a_k^*\| = \|a_k\|, \tag{15}$$

что и завершает доказательство.

Объединяя предложения 2.4 и 2.7, получаем следующий результат о единственности.

Теорема 2.8. *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* U *удовлетворяют условиям* (2) (*или* (6)), (3) *и* (4). *Если алгебра* $\mathscr{B}_0$ *обладает свойством* $(*)$, *то для любого элемента* $x \in \mathscr{B}_0$ *коэффициенты в разложении* (7) *определяются единственным способом при условии выполнения равенств* (10).

Таким образом, при наличии свойства $(*)$ можно (корректно) определить линейные непрерывные отображения $\mathscr{N}_k \colon \mathscr{B}_0 \to \mathscr{A}$, $\mathscr{N}_{\overline{k}} \colon \mathscr{B}_0 \to \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, по правилу

$$\begin{gathered} \mathscr{N}_k(x) = a_k \in \mathscr{A} U^k U^{*k} \subset \mathscr{A}, \\ \mathscr{N}_{\overline{k}}(x) = a_{\overline{k}} \in U^k U^{*k} \mathscr{A} \subset \mathscr{A}. \end{gathered} \tag{16}$$

По непрерывности мы можем продолжить эти отображения на всю алгебру $\mathscr{B}$ и, тем самым, задать "коэффициенты" для любого элемента $x \in \mathscr{B}$. Далее в теореме 2.15 будет установлено, что эти коэффициенты полностью определяют x.

Замечание 2.9. Из [17; теорема 3.3] вытекает, что свойство $(*)$ может быть переформулировано в более слабом, но, тем не менее, эквивалентном виде. В [17] доказано более общее утверждение, касающееся градуированных алгебр. Мы сформулируем соответствующую часть из [17; теорема 3.3] (ее упрощение) в терминах объектов, рассматриваемых в настоящей работе:

пусть $F \colon \mathscr{B}_0 \to \mathscr{A}$ *является ограниченным линейным отображением таким, что*

a) $F(a) = a$, $a \in \mathscr{A}$;

b) $F(aU^k) = 0$, $F(U^{*k}a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $a \in \mathscr{A}$;

тогда $\mathscr{B}_0$ *обладает свойством* $(*)$ *и* $F = \mathscr{N}_0$.

Приводимая ниже теорема 2.11 показывает, что если алгебра $\mathscr{B}_0$ обладает свойством $(*)$, то норма элемента $x \in \mathscr{B}_0$ может быть вычислена в терминах элементов алгебры $\mathscr{A}$ (коэффициентов нулевого порядка степеней xx^*). В качестве одного из ключевых моментов доказательства этой теоремы выступают оценки норм сумм элементов C^*-алгебр, перечисленные в следующей лемме 2.10. Доказательства этих оценок приведены, например, в [18; лемма 7.3] и [3; лемма 22.3].

Лемма 2.10. *Пусть* B – *произвольная* C^**-алгебра. Для любых элементов* $d_1, \dots, d_m \in B$ *справедливы следующие оценки*:

$$\biggl\| \sum_{i=1}^m d_i \biggr\|^2 \leqslant m \biggl\| \sum_{i=1}^m d_i d_i^* \biggr\|, \tag{17}$$

$$\biggl\| \sum_{i=1}^m |d_i| \biggr\|^2 \geqslant \frac{1}{m} \biggl\| \sum_{i=1}^m d_i^* d_i \biggr\|. \tag{18}$$

Теорема 2.11. *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* U *удовлетворяют предположениям теоремы* 2.8. *Если* $\mathscr{B}_0$ *обладает свойством* $(*)$, *то для любого элемента* x *вида* (7) *справедливо равенство*

$$\|x\| = \lim_{k \to \infty} \sqrt[4k]{\bigl\| \mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}] \bigr\|}, \tag{19}$$

где $\mathscr{N}_0$ – *отображение, определенное в* (16).

Доказательство. Применяя (17) к оператору

$$x = U^{*N}a_{\overline{N}} + \dots + U^{*}a_{\overline{1}} + a_0 + a_1U + \dots + a_NU^N = d_{\overline{N}} + \dots + d_0 + \dots + d_N,$$

получаем

$$\|x\|^2 \leqslant (2N+1)\left\| \sum_{i=0}^{N} d_i d_i^* + \sum_{i=1}^{N} d_{\overline{i}}\, d_{\overline{i}}^* \right\| = (2N+1)\|\mathscr{N}_0(xx^*)\|,$$

где

$$\begin{aligned} d_i d_i^* &= a_i U^i U^{i*} a_i^*, \qquad i = 0, \dots, N,\\ d_{\overline{i}} d_{\overline{i}}^* &= U^{*i} a_{\overline{i}}\, a_{\overline{i}}^* U^i, \qquad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

и поэтому $d_i d_i^*, d_{\overline{i}}\, d_{\overline{i}}^* \in \mathscr{A}$.

С другой стороны, так как $\mathscr{B}_0$ обладает свойством $(*)$, то

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \geqslant \|\mathscr{N}_0(xx^*)\|$$

и, значит,

$$\|\mathscr{N}_0(xx^*)\| \leqslant \|xx^*\| = \|x\|^2 \leqslant (2N+1)\|\mathscr{N}_0(xx^*)\|. \tag{20}$$

Применяя (20) к $(xx^*)^k$ и принимая во внимание, что

$$(xx^*)^k = (xx^*)^{k*} \quad \text{и} \quad \|(xx^*)^{2k}\| = \|x\|^{4k},$$

получаем

$$\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\| \leqslant \big\|(xx^*)^k \cdot (xx^*)^{k*}\big\| = \|x\|^{4k} \leqslant (4kN+1)\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|,$$

так как, будучи записанным в виде (7), оператор $(xx^*)^k$ имеет не более $4kN+1$ слагаемых.

Таким образом,

$$\sqrt[4k]{\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|} \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt[4k]{4kN+1} \cdot \sqrt[4k]{\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|}.$$

В силу равенства

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[4k]{4kN+1} = 1$$

заключаем, что

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[4k]{\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|}.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2.12. Формулы типа (19) являлись предметом исследования в связи с изучением различных алгебраических операторных структур и условий обратимости операторов. Основные идеи, связанные с вычислением спектрального радиуса элементов C^*-алгебр, ассоциированных с автоморфизмами с помощью формул подобного типа, восходят к работам В. В. Бреннера [19]–[23], где соответствующие результаты были получены в случае коммутативной алгебры $\mathscr{A}$ и унитарного представления группы $\mathbb{Z} \to L(H)$, порождающего автоморфизмы $\mathscr{A}$. В этих же работах отмечено, что такие формулы могут быть обобщены на случай субэкспоненциальных групп. Используя данные формулы, В. В. Бреннер получил доказательство теоремы об изоморфизме (типа теоремы 2.13), и далее этот метод доказательства был развит в [24], [18]. Общие "некоммутативные" формулы подобного сорта для вычисления спектрального радиуса приведены в [3; раздел 22]. Отметим, что, возможно, первая формула подобного типа, связанная со спектральным радиусом, получена в классической работе A. Beurling [25].

Приводимый далее основной результат этого параграфа является обобщением *теоремы об изоморфизме* для группы $(\mathbb{Z}, +)$ (см. [3; раздел 12]) на случай, когда автоморфизмы, порождаемые унитарными операторами, заменяются эндоморфизмами, порождаемыми частичными изометриями.

Теорема 2.13. *Пусть* $(\mathscr{A}_i, U_i)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют условиям* (2)–(4) *и* $\mathscr{B}_{0i}$ *обладает свойством* $(*)$. *Предположим, что отображение*

$$\varphi\colon \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2 \tag{21}$$

является изоморфизмом и

$$\varphi \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \varphi, \qquad \varphi \circ \delta_{1*} = \delta_{2*} \circ \varphi, \tag{22}$$

тогда отображение

$$\begin{aligned} \Phi(x) &:= \varphi(x), \qquad x \in \mathscr{A}_1, \\ \Phi(U_1) &:= U_2 \end{aligned} \tag{23}$$

продолжается до изоморфизма C^*-*алгебр* $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}(\mathscr{A}_1, U_1)$ *и* $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}(\mathscr{A}_2, U_2)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $x \in \mathscr{B}_{01}$ вида

$$x = U_1^{N*} a_{\overline{N}} + \dots + a_0 + \dots + a_N U_1^N, \tag{24}$$

где $a_{\overline{k}}, a_k \in \mathscr{A}_1$, $k = 0, \dots, N$.

Пусть $\Phi(x) \in \mathscr{B}_{02}$ – оператор, заданный формулой

$$\Phi(x) = U_2^{N*} \varphi(a_{\overline{N}}) + \dots + \varphi(a_0) + \dots + \varphi(a_N) U_2^N. \tag{25}$$

Из условия теоремы и рассуждений, проведенных в доказательстве предложения 2.4, следует, что отображение Φ устанавливает $*$-алгебраический изоморфизм между $\mathscr{B}_{01}$ и $\mathscr{B}_{02}$. Поэтому для завершения доказательства достаточно проверить равенство $\|x\| = \|\Phi(x)\|$, $x \in \mathscr{B}_{01}$.

Согласно теореме 2.11

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[4k]{\big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|}, \tag{26}$$

где

$$\mathscr{N}_0\colon \mathscr{B}_{01} \to \mathscr{A}_1$$

– отображение, описанное в (16). Аналогично,

$$\|\Phi(x)\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[4k]{\big\|\mathscr{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}]\big\|}, \tag{27}$$

где

$$\mathscr{N}_0\colon \mathscr{B}_{02} \to \mathscr{A}_2.$$

Заметим, что из (24), (25) и условий теоремы вытекает, что

$$\mathscr{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}] = \mathscr{N}_0[(\Phi(xx^*))^{2k}] = \varphi(\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}])$$

и, следовательно (ввиду (21)),

$$\big\|\mathscr{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}]\big\| = \big\|\mathscr{N}_0[(xx^*)^{2k}]\big\|.$$

В свою очередь, последнее равенство вместе с (26) и (27) влечет

$$\|x\| = \|\Phi(b)\|.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2.14. Следует отметить, что свойство $(*)$ и результаты типа теоремы 2.13 играют фундаментальную роль в теории скрещенных произведений C^*-алгебр на группы (полугруппы) автоморфизмов (эндоморфизмов). Это свойство является *характеристическим* свойством скрещенного произведения и позволяет строить его точные представления. Важность свойства $(*)$ впервые (по-видимому) выявил D. P. O'Donovan [26] при описании C^*-алгебр, порожденных взвешенными сдвигами. Наиболее общий результат, устанавливающий принципиальную роль этого свойства в теории скрещенных произведений C^*-алгебр на дискретные группы *автоморфизмов*, был получен в [27] (см. также [3; гл. 2, 3], где приведены подробные доказательства и различные приложения) для *произвольной* C^*-алгебры и *аменабельной* дискретной группы. Связь соответствующего свойства с точными представлениями скрещенных произведений на *эндоморфизмы*, порожденные *изометриями*, была исследована в [9], [10]. Роль свойств типа $(*)$ в теории алгебр сечений, порожденных расслоениями Фелла, изучена в [17]. Подобные свойства важны не только в "чистой" C^*-теории, но еще имеют и многочисленные приложения; они используются, например, в конструкции символического исчисления и в построении теории разрешимости функционально-дифференциальных уравнений (см. [4], [5]).

Мы закончим этот раздел утверждением, показывающим, что при наличии свойства $(*)$ отображение $\mathscr{N}_0$ является точным условным математическим ожиданием и любой элемент $x \in \mathscr{B}$ может быть "восстановлен" по его коэффициентам $\mathscr{N}_k(x)$ и $\mathscr{N}_{\overline{k}}(x)$.

Теорема 2.15. *Пусть алгебра* $\mathscr{B}_0$ *обладает свойством* $(*)$. *Для элемента* $x \in \mathscr{B}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $x = 0$;

(ii) $\mathscr{N}_k(x) = 0,\ k = 0, 1, \dots,$ *и* $\mathscr{N}_{\overline{k}}(x) = 0,\ k = 1, \dots$;

(iii) $\mathscr{N}_0(x^*x) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii).

Докажем (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости. Для каждого $\lambda \in S^1$ определим алгебру $\mathscr{B}_\lambda := \mathscr{B}(\mathscr{A}, \lambda U)$ (ясно, что $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\lambda$). Так как $\mathscr{B}_0$ обладает свойством $(*)$, то алгебра $\mathscr{B}_{\lambda 0} := (\mathscr{B}_\lambda)_0$ также обладает свойством $(*)$ и согласно теореме 2.13 отображение

$$\Phi_\lambda(a) = a, \quad a \in \mathscr{A}; \qquad \Phi_\lambda(U) = \lambda U$$

устанавливает изоморфизм между $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}_\lambda$. Для сокращения записи для каждого $x \in \mathscr{B}$ и $\lambda \in S^1$ положим

$$x(\lambda) = \Phi_\lambda(x).$$

Ввиду упомянутого изоморфизма имеем равенство

$$\|x\| = \|x(\lambda)\|, \qquad x \in \mathscr{B},$$

и, в частности, для любой конечной суммы

$$y = U^{*N} a_{\overline{N}} + \dots + U^* a_{\overline{1}} + a_0 + a_1 U + \dots + a_N U^N,$$

где $a_{\overline{k}}$, a_k удовлетворяют (10), выполняется

$$\|y\| = \|y(\lambda)\| = \big\|\lambda^{-N} U^{*N} a_{\overline{N}} + \dots + \lambda^{-1} U^* a_{\overline{1}} + a_0 + \lambda a_1 U + \dots + \lambda^N a_N U^N\big\|. \tag{28}$$

Для доказательства равенства $x = 0$ достаточно показать, что для любых фиксированных векторов $\xi, \eta \in H$, $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, выполняется

$$\langle x\xi, \eta\rangle = 0, \tag{29}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение в H.

Пусть x_n, $n = 1, 2, \dots,$ – последовательность элементов из $\mathscr{B}$, сходящаяся к x, каждый член которой имеет вид

$$x_n = U^{*N} a^{(n)}_{\overline{N}} + \dots + U^* a^{(n)}_{\overline{1}} + a^{(n)}_0 + a^{(n)}_1 U + \dots + a^{(n)}_N U^N, \tag{30}$$

где $N = N(n)$ и $a^{(n)}_{\overline{k}}$, $a^{(n)}_k$, $k = 0, 1, \dots, N(n)$, удовлетворяют (10). Рассмотрим элементы $x_n(\lambda)$ и последовательность $f_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \dots,$ непрерывных функций на S^1, заданных равенствами

$$f_n(\lambda) = \langle x_n(\lambda)\xi, \eta\rangle = \sum_{k=-N(n)}^{N(n)} \alpha^n_k \lambda^k, \tag{31}$$

где

$$\alpha_k^n = \langle a_k^n U^k \xi, \eta \rangle, \qquad k = 0, 1, \dots, N(n),$$
$$\alpha_{-k}^n = \langle U^{*k} a_{\overline{k}}^{(n)} \xi, \eta \rangle, \qquad k = 1, 2, \dots, N(n).$$

Так как $x_n \to x$, $n \to \infty$, то из (28) следует, что

$$\|x_{n_1}(\lambda) - x_{n_2}(\lambda)\| = \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \to 0, \qquad n_1, n_2 \to \infty. \tag{32}$$

Поэтому для любого фиксированного $\lambda_0 \in S^1$ последовательность $x_n(\lambda_0)$ сходится к некоторому элементу $x(\lambda) \in \mathscr{B}$.

Пусть $f(\lambda)$ – функция, заданная равенством

$$f(\lambda) = \langle x(\lambda)\xi, \eta \rangle.$$

Применяя (32), получаем

$$|f_{n_1}(\lambda) - f_{n_2}(\lambda)| = \bigl|\langle [x_{n_1}(\lambda) - x_{n_2}(\lambda)]\xi, \eta \rangle\bigr| \leqslant \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \to 0, \qquad n_1, n_2 \to \infty,$$

откуда следует, что последовательность f_n (непрерывных) функций сходится равномерно (на S^1) к f. Значит, f – непрерывная функция и, следовательно, $f \in L^2(S^1)$.

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \lambda^k,$$

где правая часть – ряд Фурье для f. Так как $f_n \to f$ (в $L^2(S^1)$), то

$$\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k \quad \text{для каждого } k, \tag{33}$$

где $\alpha_k^{(n)}$ определены в (31).

Заметим теперь, что свойство $(*)$ влечет выполнение

$$\|a_k^{(n)}\| \to \|\mathscr{N}_k(x)\| \quad \text{для каждого} \quad k \geqslant 0, \tag{34}$$
$$\|a_{\overline{k}}^{(n)}\| \to \|\mathscr{N}_{\overline{k}}(x)\| \quad \text{для каждого} \quad k \geqslant 0. \tag{35}$$

Отметим также, что

$$|\alpha_k^{(n)}| \leqslant \|a_k^{(n)}\| \quad \text{для каждого} \quad k \geqslant 0,$$
$$|\alpha_{-k}^{(n)}| \leqslant \|a_{\overline{k}}^{(n)}\| \quad \text{для каждого} \quad k \geqslant 0,$$

что вместе с (33)–(35) означает, что

$$\alpha_k = 0 \quad \text{для каждого} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{36}$$

Теперь из (36) и непрерывности f следует, что

$$f(\lambda) = 0 \quad \text{для каждого} \quad \lambda \in S^1.$$

В частности,

$$f(1) = \langle x\xi, \eta\rangle = 0$$

и (29) доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, например, что (iii) $\Rightarrow$ (ii).

В силу (10) для доказательства равенств (ii) достаточно показать, что

$$\mathscr{N}_k(x)U^k = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{37}$$

$$U^{*k}\mathscr{N}_{\overline{k}}(x) = 0, \qquad k = 1, \dots . \tag{38}$$

Выбирая последовательность $x_n \to x$ элементов вида (30) и учитывая явный вид $\mathscr{N}_0(x_n^* x_n)$, а также то, что при $n \to \infty$ для каждого фиксированного k имеем $a_k^{(n)} \to \mathscr{N}_k(x)$, $a_{\overline{k}}^{(n)} \to \mathscr{N}_{\overline{k}}(x)$ и $\mathscr{N}_0(x_n^* x_n) \to \mathscr{N}_0(x^*x)$, мы заключаем, что для любого $k_0 > 0$ справедливо

$$\biggl\| \sum_{k=0}^{k_0} U^{*k}\mathscr{N}_k(x)^*\mathscr{N}_k(x)U^k + \sum_{k=1}^{k_0} \mathscr{N}_{\overline{k}}(x)U^k U^{*k}\mathscr{N}_{\overline{k}}(x)\biggr\| \leqslant \mathscr{N}_0(x^*x). \tag{39}$$

Отсюда и из равенства (iii) вытекают равенства (37) и (38).

Теорема доказана.

§ 3. Алгебра коэффициентов

Важным элементом конструкций, проведенных в предыдущем параграфе, является $*$-алгебра $\mathscr{A}$, удовлетворяющая условиям (2) (или (6)), (3) и (4), т.е. алгебра коэффициентов. Настоящий параграф посвящен исследованию метода построения алгебры коэффициентов на основе подходящей начальной алгебры. Основной результат здесь – теорема 3.11.

В § 3 мы фиксируем $*$-подалгебру $\mathscr{A}_0 \subset L(H)$, $1 \in \mathscr{A}_0$, и оператор U такой, что $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом (в частности, это значит, что U – частичная изометрия). Начав с данной алгебры, мы будем расширять ее с помощью отображений δ и δ_* до алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$.

Определение 3.1. Пусть X – подмножество $L(H)$. Обозначим через $\{X\}$ $*$-подалгебру в $L(H)$, порожденную X. Для каждого $n = 0, 1, \dots$ полагаем

$$E_n(X) = \{X, \delta(X), \dots, \delta^n(X)\}; \tag{40}$$

$$E_{*n}(X) = \{X, \delta_*(X), \dots, \delta_*^n(X)\}. \tag{41}$$

Положим также

$$E(X) = \biggl\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta^n(X) \biggr\}, \tag{42}$$

$$E_*(X) = \biggl\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(X) \biggr\}. \tag{43}$$

Предложение 3.2. (i) *Отображение* $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ *является морфизмом тогда и только тогда, когда* $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to L(H)$ *является морфизмом.*

(ii) *Если* $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_0$ *является эндоморфизмом, то* $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ *также является эндоморфизмом.*

Доказательство. (i) Пусть $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом. Отсюда следует, что U – частичная изометрия.

Если $k \geqslant 1$ или $l \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}\delta(\delta_*^k(a))\delta(\delta_*^l(b)) &= U(U^{*k}aU^k)U^*U(U^{*l}bU^l)U^* \\ &= U(U^{*k}aU^kU^{*l}bU^l)U^* = \delta(\delta_*^k(a)\delta_*^l(b)).\end{aligned} \tag{44}$$

Если же $k = l = 0$, то δ является морфизмом по условию. Таким образом, $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to L(H)$ является морфизмом. С другой стороны, так как $\mathscr{A}_0$ является подалгеброй $E_*(\mathscr{A}_0)$, то если $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to L(H)$ – морфизм, то и $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ также морфизм.

(ii) Это утверждение вытекает из уже доказанного п. (i) и замечания, что из предположения $\delta(\mathscr{A}_0) \subset \mathscr{A}_0$ следует, что для любого $a \in \mathscr{A}_0$ мы имеем

$$\delta(\delta_*^k(a)) = UU^{*k}aU^kU^* = \delta(1)\delta_*^{k-1}(a)\delta(1) \in E_*(\mathscr{A}_0).$$

Предложение 3.3. *Следующие четыре условия эквивалентны*:

(i) U^*U *является проектором и* $U^*U \in \mathscr{A}_0'$;
(ii) U^*U *является проектором и* $U^*U \in E_*(\mathscr{A}_0)'$;
(iii) U *и* $\mathscr{A}_0$ *обладают свойством* (2);
(iv) U *и* $E_*(\mathscr{A}_0)$ *обладают свойством* (2).

Доказательство. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) и (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) вытекает из предложения 2.2. Ясно также, что (ii) $\Rightarrow$ (i). Поэтому достаточно показать, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Итак, предположим, что $U^*U \in \mathscr{A}_0'$. Тогда для $k \geqslant 0$

$$U^*U\delta_*^k(a) = U^*UU^{*k}aU^k = U^{*k}aU^k = U^{*k}aU^kU^*U = \delta_*^k(a)U^*U,$$

т.е. $U^*U \in E_*(\mathscr{A}_0)'$.

Предложение 3.4. *Пусть* $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ *является морфизмом. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *существует* $*$-*алгебра* $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$, *удовлетворяющая условиям* (2) *и* (3);
(ii)
$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathscr{A}_0)'. \tag{45}$$

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если (i) верно, то, так как $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$ и удовлетворяет условию (3), мы имеем $\mathscr{A} \supset \delta^n(\mathscr{A}_0)$, $n = 0, 1, \dots$. Данное свойство и предположение, что $\mathscr{A}$ удовлетворяет условию (2), влечет выполнение (45) ввиду эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем, что в качестве алгебры $\mathscr{A}$, удовлетворяющей (2) и (3), можно взять $E(\mathscr{A}_0)$.

Из (45) следует, что для любых $a, b \in \mathscr{A}_0$ выполняется

$$\begin{aligned}\delta(\delta^k(a)\delta^l(b)) &= U\delta^k(a)\delta^l(b)U^* = UU^*U\delta^k(a)\delta^l(b)U^* = U\delta^k(a)U^*U\delta^l(b)U^* \\ &= \delta(\delta^k(a))\delta(\delta^l(b)).\end{aligned}$$

Таким образом, $\delta\colon E(\mathscr{A}_0) \to E(\mathscr{A}_0)$ (т.е. (3) верно) и $\delta\colon E(\mathscr{A}_0) \to E(\mathscr{A}_0)$ является эндоморфизмом.

Вышеприведенные наблюдения вместе с замечанием, что (45) $\Leftrightarrow U^*U \in E(A_0)'$, и эквивалентностью (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2 означают, что условие (2) выполняется для $E(\mathscr{A}_0)$ и U.

Замечание 3.5. Отметим, что если U – изометрия, то (45) выполняется для любой алгебры $\mathscr{A}_0$.

Следующее предложение показывает, что в действительности об алгебрах, удовлетворяющих условиям (2) и (3), можно сказать гораздо больше.

Предложение 3.6. *Пусть $\mathscr{A}$ и U удовлетворяют условиям* (2) *и* (3), *тогда*:

(i) *δ является эндоморфизмом $\mathscr{A}$*;

(ii)
$$U^k a = \delta^k(a)U^k, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{46}$$
для $a \in \mathscr{A}$;

(iii) *все операторы U^k, $k = 1, 2, \dots$, являются частичными изометриями и*
$$U^{*k}U^k \in \mathscr{A}', \qquad k = 1, 2, \dots; \tag{47}$$

(iv) *$U^{*k}U^k$, $k = 1, 2, \dots$, – убывающая последовательность коммутирующих проекторов*;

(v) *все операторы U^{*k}, $k = 1, 2, \dots$, – частичные изометрии и U^kU^{*k}, $k = 1, 2, \dots$, – убывающая последовательность коммутирующих проекторов*;

(vi)
$$[U^{*k}U^k, U^lU^{*l}] = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, \tag{48}$$
где $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ – коммутатор α и β;

(vii) *для любых $1 \leqslant k \leqslant l$*
$$U^*U^kU^{*l} = U^{k-1}U^{*l} \quad \text{и} \quad UU^{*k}U^l = U^{*k-1}U^l.$$

Доказательство. (i) Утверждение вытекает из (2), (3) и эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2.

(ii) Утверждение вытекает из (i) и (2).

(iii) Утверждение вытекает из (ii) и эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2.

(iv) В соответствии с утверждением 5) замечания 2.1 из (iii) следует, что

$$U^kU^{*k}U^k = U^k, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Поэтому для любых $k \geqslant l$ имеем

$$U^{*k}U^kU^{*l}U^l = U^{*k}U^{k-l}U^lU^{*l}U^l = U^{*k}U^{k-l}U^l = U^{*k}U^k.$$

Аналогично проверяется, что

$$U^{*l}U^lU^{*k}U^k = U^{*k}U^k.$$

Таким образом, (iv) верно.

(v) Так как все операторы U^k, $k = 1, 2, \dots$, – частичные изометрии, то в соответствии с утверждением 2) замечания 2.1 все операторы U^{*k}, $k = 1, 2, \dots$, также являются частичными изометриями. Теперь таким же образом, как в доказательстве (iv), мы получаем (v).

(vi) Утверждение следует из (47) и замечания, что $U^lU^{*l} \in \mathscr{A}$, $l = 1, 2, \dots$.

(vii) Пусть $1 \leqslant k \leqslant l$, тогда, применяя (48), имеем

$$\begin{aligned} U^*U^kU^{*l} &= (U^*U)(U^{k-1}U^{*k-1})U^{*l-k+1} = (U^{k-1}U^{*k-1})(U^*U)U^{*l-k+1} \\ &= (U^{k-1}U^{*k-1})(U^*UU^*)U^{*l-k} = U^{k-1}U^{*l}. \end{aligned}$$

Второе равенство в (vii) доказывается таким же способом.

В действительности, предложение 3.6 и доказательство предложения 3.4 дают нам некоторую дополнительную информацию. Эта информация собрана в следующем предложении.

Предложение 3.7. *Пусть $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом и выполнено условие* (45), *тогда $E(\mathscr{A}_0)$ – минимальная $*$-алгебра, удовлетворяющая* (2) *и* (3) *и содержащая $\mathscr{A}_0$, и при этом δ является эндоморфизмом $E(\mathscr{A}_0)$.*

Более того, в этом случае все операторы U^k, $k = 1, 2, \dots$, – частичные изометрии и

$$U^{*k}U^k \in E(\mathscr{A}_0)'. \tag{49}$$

Последовательности $U^{*k}U^k$, $k = 1, 2, \dots$, и U^kU^{*k}, $k = 1, 2, \dots$, являются убывающими последовательностями коммутирующих проекторов и

$$[U^{*k}U^k, U^lU^{*l}] = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots . \tag{50}$$

Доказательство. В доказательстве предложения 3.4 было показано, что $E(\mathscr{A}_0)$ удовлетворяет (2), (3) и δ является эндоморфизмом $E(\mathscr{A}_0)$. Минимальность алгебры $E(\mathscr{A}_0)$ вытекает из ее конструкции.

Наконец, так как $E(\mathscr{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3), то все остальные утверждения данного предложения следуют из предложения 3.6.

Предложение 3.8. *Пусть $\mathscr{A}_0$ обладает свойствами* (2) *и* (3), *тогда*:

(i) *для любых* $0 \leqslant l \leqslant k$

$$\delta_*^k(\mathscr{A}_0)\delta_*^l(\mathscr{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathscr{A}_0), \qquad \delta_*^l(\mathscr{A}_0)\delta_*^k(\mathscr{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathscr{A}_0), \tag{51}$$

в частности, $\delta_*^n(\mathscr{A}_0)$ *является идеалом в* $E_{*n}(\mathscr{A}_0)$, *где* $E_{*n}(\mathscr{A}_0)$ – *алгебра, определенная в* 3.1;

(ii) $E_{*n}(\mathscr{A}_0)$ *является множеством операторов вида*

$$a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^n(a_n), \qquad a_k \in \mathscr{A}_0, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

(iii) $\delta\colon E_{*n}(\mathscr{A}_0) \to E_{*n-1}(\mathscr{A}_0)$, $n = 1, \dots,$ *является морфизмом*;

(iv) $\delta_*\colon E_{*n}(\mathscr{A}_0) \to E_{*n+1}(\mathscr{A}_0)$, $n = 0, 1, \dots$.

Доказательство. (i) Непосредственным вычислением для $0 \leqslant l \leqslant k$ и $a, b \in \mathscr{A}_0$ получаем

$$\begin{aligned}\delta_*^k(a)\delta_*^l(b) &= \delta_*^k(a\delta^k(1)\delta^{k-l}(b)) \in \delta_*^k(\mathscr{A}_0),\\ \delta_*^l(b)\delta_*^k(a) &= \delta_*^k(\delta^{k-l}(b)\delta^k(1)a) \in \delta_*^k(\mathscr{A}_0).\end{aligned}$$

Эти соотношения доказывают (i).

Ясно, что (ii) вытекает из (i).

(iii) Вспомним, что по предположению $\delta(\mathscr{A}_0) \subset \mathscr{A}_0$ и для любых $k \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\delta(\delta_*^k(a)) &= UU^{*k}aU^kU^* = \delta(1)U^{*k-1}aU^{k-1}\delta(1)\\ &= U^{*k-1}[\delta^k(1)a\delta^k(1)]U^{k-1} \in \delta_*^{k-1}(\mathscr{A}_0).\end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с (ii) дают

$$\delta(E_{*n}(\mathscr{A}_0)) \subset E_{*n-1}(\mathscr{A}_0), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Заметим также, что так как $\mathscr{A}_0$ обладает свойством (2), то эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) из предложения 3.3 означает, что алгебра $E_{*n}(\mathscr{A}_0)$, являющаяся подалгеброй $E_*(\mathscr{A}_0)$, также обладает этим свойством. Поэтому $\delta\colon E_{*n}(\mathscr{A}_0) \to E_{*n-1}(\mathscr{A}_0)$ – эндоморфизм (ввиду эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2).

(iv) Утверждение очевидно.

Теперь мы готовы выписать расширение алгебры $\mathscr{A}_0$, дающее решение проблемы, рассматриваемой в этом разделе: расширение, являющееся алгеброй коэффициентов.

Предложение 3.9. *Пусть $\mathscr{A}_0$ обладает свойством* (3). *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *существует алгебра коэффициентов $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$, т.е. алгебра $\mathscr{A}$, обладающая свойствами* (2), (3) *и* (4).
(ii) *$\mathscr{A}_0$ обладает свойством* (2).

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Утверждение очевидно, так как $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем, что $E_*(\mathscr{A}_0)$ – алгебра коэффициентов.

Так как $\mathscr{A}_0$ обладает свойством (2), то эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) из предложения 3.3 означает, что $E_*(\mathscr{A}_0)$ также обладает свойством (2).

Заметим теперь, что в рассматриваемой ситуации выполнены все условия предложения 3.8. Поэтому $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ является эндоморфизмом (в частности, для $E_*(\mathscr{A}_0)$ выполнено (3)). Утверждение (ii) из предложения 3.8 влечет выполнение (4) для $E_*(\mathscr{A}_0)$. Доказательство завершено.

В действительности, предложение 3.8 и рассуждения, использованные в доказательстве предложения 3.9, дают нам дополнительную информацию, приведенную в следующем предложении.

Предложение 3.10. *Если $\mathscr{A}_0$ обладает свойствами* (2) *и* (3), *то $E_*(\mathscr{A}_0)$ – минимальная алгебра коэффициентов, содержащая A_0, и δ является эндоморфизмом $E_*(\mathscr{A}_0)$.*

Более того, в этой ситуации мы имеем:

(i) *для любых $0 \leqslant l \leqslant k$*

$$\delta_*^k(\mathscr{A}_0)\delta_*^l(\mathscr{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathscr{A}_0), \qquad \delta_*^l(\mathscr{A}_0)\delta_*^k(\mathscr{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathscr{A}_0); \tag{52}$$

(ii) *любой элемент $\beta \in E_*(\mathscr{A}_0)$ может быть записан в виде*

$$\beta = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^N(a_N), \tag{53}$$

где $a_k \in \mathscr{A}_0$, $k = 0, \dots, N$; $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. В доказательстве предложения 3.9 установлено, что если алгебра $\mathscr{A}_0$ обладает свойствами (2) и (3), то $E_*(\mathscr{A}_0)$ является алгеброй коэффициентов и δ – эндоморфизм $E_*(\mathscr{A}_0)$. Минимальность расширения $E_*(\mathscr{A}_0) \supset \mathscr{A}_0$ ясна из его конструкции.

Наконец, справедливость (52) и (53) вытекает из предложения 3.8.

В качестве следствия вышеприведенных предложений 3.4, 3.7, 3.9, 3.10 мы получаем следующий основной результат параграфа.

Теорема 3.11. *Пусть $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом.*

I. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *существует алгебра коэффициентов $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$, т.е. алгебра $\mathscr{A}$, обладающая свойствами* (2), (3) *и* (4);
(ii) *выполняется условие* (45).

II. *Если выполнено условие* (45), *то* $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ – *минимальная алгебра коэффициентов, содержащая* $\mathscr{A}_0$, *и* δ *является эндоморфизмом* $E_*(E(\mathscr{A}_0))$.

Более того, мы имеем:

(i) *для любых* $0 \leqslant l \leqslant k$ *справедливо*

$$\delta_*^k(E(\mathscr{A}_0))\delta_*^l(E(\mathscr{A}_0)) \subset \delta_*^k(E(\mathscr{A}_0)), \qquad \delta_*^l(E(\mathscr{A}_0))\delta_*^k(E(\mathscr{A}_0)) \subset \delta_*^k(E(\mathscr{A}_0));$$

(ii) *любой элемент* $\beta \in E_*(E(\mathscr{A}_0))$ *может быть записан в виде*

$$\beta = \alpha_0 + \delta_*(\alpha_1) + \dots + \delta_*^N(\alpha_N),$$

где $\alpha_k \in E(\mathscr{A}_0)$, $k = 0, \dots, N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(iii) *все операторы* U^k, $k = 1, 2, \dots$, *являются частичными изометриями и*

$$U^{*k}U^k \in E_*(E(\mathscr{A}_0))'. \tag{54}$$

Последовательности $U^{*k}U^k$, $k = 1, 2, \dots$, *и* U^kU^{*k}, $k = 1, 2, \dots$, *являются убывающими последовательностями коммутирующих проекторов и*

$$[U^{*k}U^k, U^lU^{*l}] = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots . \tag{55}$$

Замечание 3.12. Подчеркнем еще раз, что если U – изометрия, то условие (45) выполняется для *любой* алгебры $\mathscr{A}_0$ и, соответственно, при этом для любой алгебры справедливы все утверждения п. II данной теоремы.

Подводя итог процедуре расширения $\mathscr{A}_0 \hookrightarrow E_*(E(\mathscr{A}_0))$, описанной выше, мы заключаем, что если у нас имеется $*$-алгебра $\mathscr{A}_0 \subset L(H)$, $1 \in \mathscr{A}_0$, такая, что $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом и выполнено условие (45), то C^*-алгебра $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{A}_0, U)$, порожденная $\mathscr{A}_0$ и U, может быть эквивалентным способом задана как $\mathscr{B} = \mathscr{B}(E_*(E(\mathscr{A}_0)), U)$, где $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ – минимальная алгебра коэффициентов, содержащая $\mathscr{A}_0$.

§ 4. Коммутативная алгебра коэффициентов

Рассматривая процедуры расширения $\mathscr{A}_0 \hookrightarrow E(\mathscr{A}_0)$, $\mathscr{A}_0 \hookrightarrow E_*(\mathscr{A}_0)$ и $\mathscr{A}_0 \hookrightarrow E_*(E(\mathscr{A}_0))$, представленные в предыдущем параграфе, мы естественным образом приходим к следующему вопросу: какие свойства алгебры $\mathscr{A}_0$ сохраняются при этих процедурах? Ясно, что для сохранения заданного свойства, например коммутативности, требуется принимать во внимание дополнительные соотношения между $\mathscr{A}_0$ и U. Обсуждение этих вопросов и является темой настоящего параграфа.

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что $\mathscr{A}_0$ – коммутативная $*$-подалгебра $L(H)$ и $1 \in \mathscr{A}_0$.

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathscr{A}_0$ – *коммутативная* $*$-*подалгебра* $L(H)$, *удовлетворяющая условиям* (2) *и* (3), *тогда* $E_*(\mathscr{A}_0)$ *является коммутативной алгеброй и оба отображения* $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ *и* $\delta_*\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ *являются эндоморфизмами.*

Доказательство. В рассматриваемой ситуации выполнены все предположения предложения 3.8. Из рассуждений, примененных в доказательстве (i) предложения 3.8, коммутативности алгебры $\mathscr{A}_0$ и условия $\delta(\mathscr{A}_0) \subset \mathscr{A}_0$ вытекает равенство

$$\delta_*^k(a)\delta_*^l(b) = \delta_*^l(b)\delta_*^k(a), \qquad k, l \geqslant 0, \quad a, b, \in \mathscr{A}_0.$$

Таким образом, $E_*(\mathscr{A}_0)$ – коммутативная алгебра.

Согласно предложению 3.10 $\delta\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ является эндоморфизмом и $\delta_*(E_*(\mathscr{A}_0)) \subset E_*(\mathscr{A}_0)$, поэтому для завершения доказательства достаточно проверить, что $\delta_*\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ – эндоморфизм.

Так как $E_*(\mathscr{A}_0)$ – коммутативная алгебра и $\delta(\mathscr{A}_0) \subset \mathscr{A}_0$, то

$$UU^* = \delta(1) \in \mathscr{A}_0 \subset [E_*(\mathscr{A}_0)]'.$$

Поэтому можно применить эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2 к U^*, δ_* и $E_*(\mathscr{A}_0)$, и мы заключаем, что $\delta_*\colon E_*(\mathscr{A}_0) \to E_*(\mathscr{A}_0)$ является эндоморфизмом.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathscr{A}_0$ – коммутативная $*$-подалгебра $L(H)$ и $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом.*

Следующие три утверждения эквивалентны:

- (i) *существует коммутативная $*$-алгебра $\overline{\mathscr{A}} \supset \mathscr{A}_0$, удовлетворяющая условиям* (2) *и* (3);
- (ii) *существует коммутативная алгебра коэффициентов $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$*;
- (iii) *выполнены следующие два условия*:

$$\mathscr{A}_0 \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathscr{A}_0)', \tag{56}$$

$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathscr{A}_0)'. \tag{57}$$

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i). Утверждение очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Здесь (57) верно ввиду предложения 3.4. Кроме того, так как $\mathscr{A}_0 \subset \overline{\mathscr{A}}$ и $\overline{\mathscr{A}}$ является коммутативной алгеброй и удовлетворяет (3), то верно и (56).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Возьмем здесь $\mathscr{A} = E_*(E(A_0))$. Из (57) и теоремы 3.11 вытекает, что $E_*(E(A_0))$ – алгебра коэффициентов, поэтому достаточно доказать, что $E_*(E(A_0))$ коммутативна. Заметим, что если $E(\mathscr{A}_0)$ коммутативна, то согласно предложению 4.1 $E_*(E(A_0))$ также коммутативна. Поэтому для завершения доказательства достаточно установить коммутативность алгебры $E(\mathscr{A}_0)$.

Из (56) мы получаем

$$[a, \delta^n(b)] = 0, \qquad a, b \in \mathscr{A}_0, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{58}$$

Кроме того, из (57) и предложения 3.7 вытекает, что $\delta\colon E(\mathscr{A}_0) \to E(\mathscr{A}_0)$ является морфизмом. Это вместе с (58) дает

$$[\delta^{k+l}(a), \delta^l(b)] = \delta^l([\delta^k(a), b]) = 0,$$

т.е. $E(\mathscr{A}_0)$ – коммутативная алгебра. Доказательство завершено.

В действительности, вышеприведенный результат можно усилить.

Предложение 4.3. *Пусть* $\mathscr{A}_0$ – *коммутативная* $*$-*подалгебра* $L(H)$ *и* $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ *является морфизмом. Если выполнены* (56) *и* (57), *то* $E(\mathscr{A}_0)$ – *минимальная коммутативная* $*$-*алгебра, содержащая* $\mathscr{A}_0$ *и удовлетворяющая* (2) *и* (3), *а* $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ – *минимальная коммутативная алгебра коэффициентов, содержащая* $\mathscr{A}_0$. *Более того,* $\delta\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ *и* $\delta_*\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ *являются эндоморфизмами и*

$$E_*(E(\mathscr{A}_0)) = E(E_*(\mathscr{A}_0)). \tag{59}$$

Доказательство. Рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 4.2, показывают, что $E(\mathscr{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3) и $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ – алгебра коэффициентов. Минимальность алгебр $E(\mathscr{A}_0)$ и $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ вытекает из их конструкции.

Так как $E(\mathscr{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3), то согласно предложению 4.1 отображения $\delta\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ и $\delta_*\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ являются эндоморфизмами. Итак, для завершения доказательства достаточно проверить равенство (59).

Заметим, что

$$\delta_*\colon \mathscr{A}_0 \to E_*(E(\mathscr{A}_0)) \tag{60}$$

является морфизмом и, кроме того,

$$UU^* \in E_*(E(\mathscr{A}_0)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A}_0)', \tag{61}$$

$$\mathscr{A}_0 \subset E_*(E(\mathscr{A}_0)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathscr{A}_0)'. \tag{62}$$

Включение (61) означает замену U на U^* и δ на δ_* в (57). С другой стороны, (62) означает замену δ на δ_* в (56). Таким образом, ввиду уже доказанной части данного предложения оба отображения $\delta\colon E(E_*(\mathscr{A}_0)) \to E(E_*(\mathscr{A}_0))$ и $\delta_*\colon E(E_*(\mathscr{A}_0)) \to E(E_*(\mathscr{A}_0))$ являются эндоморфизмами. Поэтому

$$E_*(E(E_*(\mathscr{A}_0))) \subset E(E_*(\mathscr{A}_0)). \tag{63}$$

Однако так как

$$E_*(E(E_*(\mathscr{A}_0))) \supset E_*(E(\mathscr{A}_0)),$$

то (63) означает, что

$$E_*(E(\mathscr{A}_0)) \subset E(E_*(\mathscr{A}_0)). \tag{64}$$

Аналогичным рассуждением мы получаем

$$E(E_*(\mathscr{A}_0)) \subset E_*(E(\mathscr{A}_0)), \tag{65}$$

поэтому (59) верно.

§ 5. Расширения $*$-алгебр частичными изометриями и частичные C^*-динамические системы

В этом параграфе мы проанализируем взаимосвязь между ковариантными алгебрами, порожденными частичными C^*-динамическими системами и объектами, исследуемыми в настоящей работе.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathscr{A}$ – линейное подпространство в $L(H)$, U – частичная изометрия в H, $\delta(\mathscr{A})\subset\mathscr{A}$, $\delta_*(\mathscr{A})\subset\mathscr{A}$. Тогда*

$$\delta(\mathscr{A})=\delta(1)\mathscr{A}\delta(1),\qquad \delta_*(\mathscr{A})=\delta_*(1)\mathscr{A}\delta_*(1) \tag{66}$$

и отображения

$$\delta\colon \delta_*(\mathscr{A})\to\delta(\mathscr{A}), \tag{67}$$

$$\delta_*\colon \delta(\mathscr{A})\to\delta_*(\mathscr{A}) \tag{68}$$

являются линейными изометрическими биекциями. Кроме того, отображения

$$\delta_*\delta\colon \delta_*(\mathscr{A})\to\delta_*(\mathscr{A}), \tag{69}$$

$$\delta\delta_*\colon \delta(\mathscr{A})\to\delta(\mathscr{A}) \tag{70}$$

являются тождественными.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для отображения δ.

Имеем

$$\delta(\mathscr{A})=U\mathscr{A}U^*=UU^*U\mathscr{A}U^*UU^*=UU^*(U\mathscr{A}U^*)\,UU^*,$$

откуда следует

$$\delta(\mathscr{A})\subset\delta(1)\mathscr{A}\delta(1). \tag{71}$$

Кроме того,

$$\delta(1)\mathscr{A}\delta(1)=\delta(\delta_*(\mathscr{A}))\subset\delta(\mathscr{A}). \tag{72}$$

Из (71) и (72) вытекает

$$\delta(\mathscr{A})=\delta(1)\mathscr{A}\delta(1)=\delta(\delta_*(\mathscr{A})) \tag{73}$$

и, аналогично,

$$\delta_*(\mathscr{A})=\delta_*(1)\mathscr{A}\delta(1)=\delta_*(\delta(\mathscr{A})). \tag{74}$$

Итак, (66) доказано.

Более того, из (73) следует, что отображение

$$\delta\colon\delta_*(\mathscr{A})\to\delta(\mathscr{A}) \tag{75}$$

является сюръекцией. Помимо этого, так как $U^*U=U^*U\cdot U^*U$, то для любого элемента $a\in\mathscr{A}$ имеем

$$\delta_*(1)a\delta_*(1)=\delta_*\bigl[\delta[\delta_*(1)a\delta_*(1)]\bigr]. \tag{76}$$

Значит, отображение $\delta_*\colon\delta(\mathscr{A})\to\delta_*(\mathscr{A})$ является обратным для отображения $\delta\colon\delta_*(\mathscr{A})\to\delta(\mathscr{A})$, что доказывает (69). Итак, $\delta\colon\delta_*(\mathscr{A})\to\delta(\mathscr{A})$ и $\delta_*\colon\delta(\mathscr{A})\to\delta_*(\mathscr{A})$ – взаимно обратные отображения и, следовательно, биекции.

Так как, очевидно, $\|\delta\|\leqslant 1$ и $\|\delta_*\|\leqslant 1$, то из их взаимной обратимости следует изометричность. Доказательство завершено.

Очевидно, что если $\mathscr{A}$ – алгебра коэффициентов, то она удовлетворяет условиям предложения 5.1. Однако в такой ситуации мы можем сказать гораздо больше.

Определение 5.2. Пусть $\mathscr{A}$ – алгебра коэффициентов. В этом случае мы имеем

$$\delta_*^n(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \quad \delta^n(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Для унификации записи введем следующие обозначения:

$$D_k = \begin{cases} \delta^k(\mathscr{A}), & k \geqslant 0, \\ \delta_*^{-k}(\mathscr{A}), & k < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$\delta_k = \begin{cases} \delta^k, & k \geqslant 0, \\ \delta_*^{-k}, & k < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

В следующем предложении собраны свойства, описывающие структурные взаимосвязи между введенными объектами.

Предложение 5.3. *Пусть $\mathscr{A}$ – алгебра коэффициентов, $1 \in \mathscr{A}$, D_k и δ_k, $k \in \mathbb{Z}$, – множества и отображения, введенные в 5.2. Тогда*

$$\cdots \subset D_{-2} \subset D_{-1} \subset D_0 = \mathscr{A} \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots , \tag{77}$$

причем D_k, $k < 0$, – двусторонние $*$-идеалы в $\mathscr{A}$, а D_k, $k > 0$, – $*$-подалгебры в $\mathscr{A}$ и

$$D_k = \delta_k(1)\mathscr{A}\delta_k(1), \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{78}$$

$$D_{-k} = \delta_{-k}(1)\mathscr{A}\delta_{-k}(1) = \delta_{-k}(1)\mathscr{A} = \mathscr{A}\delta_{-k}(1), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{79}$$

$$D_k \cap D_s = \delta_k(1) D_s \delta_k(1), \qquad k, s \in \mathbb{Z}. \tag{80}$$

При этом отображения

$$\delta_k \colon D_{-k} \to D_k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

являются $*$-изоморфизмами.

Кроме того, отображения

$$\delta_{-k}\delta_k \colon D_{-k} \to D_{-k}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{81}$$

являются тождественными.

При этом

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) \subset D_{k+l}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{82}$$

$$\delta_{k+l}(a) = \delta_k(\delta_l(a)), \qquad a \in D_{-l} \cap D_{-k-l}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{83}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{A}$ – алгебра коэффициентов, то

$$\delta_*^k(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \quad \delta^k(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Значит, $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям предложения 5.1 с заменой δ на $\delta^k = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, и δ_* на $\delta_*^k = \delta_{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому выполняется (78) и отображения

$$\delta_k \colon D_{-k} \to D_k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

являются линейными положительными изометрическими биекциями, а отображения

$$\delta_{-k}\delta_k \colon D_{-k} \to D_{-k}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

являются тождественными.

Так как отображения $\delta^k \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $k = 1, 2, \dots$, являются эндоморфизмами, то множества $D_k = \delta^k(\mathscr{A})$, $k = 1, 2, \dots$, являются $*$-подалгебрами в $\mathscr{A}$.

Согласно предложению 3.6 $\delta^k(1)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\delta_*^k(1)$, $k = 1, 2, \dots$, являются убывающими последовательностями проекторов. Отсюда, из определения D_k и δ_k и предложения 5.1 вытекают включения (77).

Кроме того, согласно предложению 3.6

$$\delta_{-k}(1) = \delta_*^k(1) \in \mathscr{A}', \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{84}$$

поэтому справедливо (79). Более того, из (84) мы заключаем, что для любого $k = 1, 2, \dots$ и любого элемента $a \in \mathscr{A}$ выполняется

$$\begin{aligned} aD_{-k} &= a\delta_{-k}(1)\mathscr{A}\delta_{-k}(1) = \delta_{-k}(1)a\mathscr{A}\delta_{-k}(1) \subset D_{-k}, \\ D_{-k}a &= \delta_{-k}(1)\mathscr{A}\delta_{-k}(1)a = \delta_{-k}(1)\mathscr{A}a\delta_{-k}(1) \subset D_{-k}, \end{aligned}$$

т.е. D_{-k}, $k = 1, 2, \dots$, являются двусторонними идеалами.

Из вышеприведенных наблюдений следует, что отображения

$$\delta_k \colon D_{-k} \to D_k, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

являются $*$-изоморфизмами, а так как отображения

$$\delta_{-k} \colon D_k \to D_{-k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

являются обратными для δ_k, то они также являются $*$-изоморфизмами.

Из (78) и (79) заключаем, что $a \in D_k \cap D_s$ тогда и только тогда, когда справедливы следующие равенства

$$a = \delta_s(1)a\delta_s(1) = \delta_k(1)\delta_s(1)a\delta_s(1)\delta_k(1),$$

но последнее выражение – это запись произвольного элемента из $\delta_k(1)D_s\delta_k(1)$, тем самым доказано (80).

Осталось проверить (82) и (83).

Для проверки (82) рассмотрим следующие возможные случаи.

а) $k \geqslant 0, l \geqslant 0$. В этом случае

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = \delta^k(\delta_*^k(\mathscr{A}) \cap \delta^l(\mathscr{A})) \subset \delta^k(\delta^l(\mathscr{A})) = \delta^{k+l}(\mathscr{A}) = D_{k+l}.$$

б) $k \geqslant 0, l < 0$. Положим $n = -l$. Возможны следующие ситуации.

1) $n \leqslant k$. В этом случае

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = \delta^k(\delta_*^k(\mathscr{A}) \cap \delta_*^n(\mathscr{A})) = \delta^k(\delta_*^k(\mathscr{A})) = \delta_k(D_{-k}) = D_k \subset D_{k+l},$$

где последнее включение следует из (77).

2) $n > k$. В этом случае, используя равенство (79) и перестановочность проекторов $\delta^k(1)$ и $\delta_*^{n-k}(1)$ (предложение 3.6, (vi)), мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_k(D_{-k} \cap D_l) &= \delta^k(\delta_*^k(\mathscr{A}) \cap \delta_*^n(\mathscr{A})) = \delta^k(\delta_*^n(\mathscr{A})) = U^k U^{*n} \mathscr{A} U^n U^{*k} \\ &= \delta^k(1)\delta_*^{n-k}(\mathscr{A})\delta^k(1) = \delta^k(1)\delta_*^{n-k}(1)\mathscr{A}\delta_*^{n-k}(1)\delta^k(1) \\ &= \delta_*^{n-k}(1)[\delta^k(1)\mathscr{A}\delta^k(1)]\delta_*^{n-k}(1) \subset \delta_*^{n-k}(\mathscr{A}) = D_{k-n}. \end{aligned}$$

Итак, для $k \geqslant 0$ (82) доказано. Случай $k < 0$ рассматривается аналогично.
Проверим теперь (83).
Рассмотрим следующие возможные ситуации.
а) $k \geqslant 0, l \geqslant 0$. В этом случае $\delta_{k+l} = \delta_k \circ \delta_l$ на D_{k-l}.
б) $k \geqslant 0, l < 0$. Положим $n = -l$. Возможны следующие ситуации.

1) $n \leqslant k$. В этом случае

$$\begin{aligned} \delta_k(\delta_l(a)) &= \delta^k(\delta_*^n(a)) = U^k U^{*n} a U^n U^{*k} \\ &= U^{k-n}(U^n U^{*n} a U^n U^{*n}) U^{*k-n}. \end{aligned} \tag{85}$$

Так как $a \in D_{-l} = D_n$, то из (78) следует, что $a = U^n U^{*n} a U^n U^{*n}$ и из (85) мы получаем

$$\delta_k(\delta_l(a)) = \delta^{k-n}(a) = \delta_{k+l}(a).$$

2) $n > k$. В этом случае

$$\begin{aligned} \delta_k(\delta_l(a)) &= \delta^k(\delta_*^n(a)) = U^k U^{*n} a U^n U^{*k} \\ &= U^k U^{*k}(U^{*n-k} a U^{n-k}) U^k U^{*k}. \end{aligned} \tag{86}$$

В рассматриваемой ситуации $\delta_*^{n-k} = \delta_{k-n} = \delta_{k+l}$, кроме того, из (82) вытекает

$$\delta_{k+l}(D_{-k-l} \cap D_{-l}) \subset D_k,$$

т.е.

$$U^{*n-k} a U^{n-k} \in D_k. \tag{87}$$

Теперь из (86), (87) и (78) получаем

$$\delta_k(\delta_l(a)) = \delta_*^{n-k}(a) = \delta_{k+l}(a).$$

Итак, для $k \geqslant 0$ (83) доказано. Случай $k < 0$ рассматривается аналогично.
Доказательство завершено.

Замечание 5.4. Просматривая доказательство включения (82) и используя (80), мы можем уточнить (82). Именно справедливо

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = D_k \cap D_{k+l}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{88}$$

По существу, предложение 5.3 показывает, что набор $(\mathscr{A}, D_k, \delta_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, "почти" задает частичную динамическую систему на $\mathscr{A}$. Напомним в связи с этим последнее понятие.

Определение 5.5. *Частичным действием* (обозначаемым через α) группы $\mathbb{Z}$ на C^*-алгебре A называется набор J_k, $k \in \mathbb{Z}$, замкнутых двусторонних идеалов A и набор α_k, $k \in \mathbb{Z}$, $*$-изоморфизмов $\alpha_k \colon J_{-k} \to J_k$ таких, что

i) $\alpha_k(J_{-k} \cap J_l) \subset J_{k+l}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
ii) $\alpha_{k+l}(a) = \alpha_k(\alpha_l(a))$, $a \in J_{-l} \cap J_{-k-l}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
iii) $J_0 = A$, $\alpha_0 = \mathrm{Id}_A$.

В этом случае говорят, что $(A, \mathbb{Z}, \alpha)$ – *частичная C^*-динамическая система.*

Отметим, что:

1) В действительности, для задания частичной динамической системы *не* требуется полностью задавать все идеалы J_k, $k \in \mathbb{Z}$, и изоморфизмы $\alpha_k \colon J_{-k} \to J_k$. Достаточно задать два идеала J_{-1}, J_1 и изоморфизм $\alpha_1 \colon J_{-1} \to J_1$, после чего все остальные идеалы и изоморфизмы, удовлетворяющие условиям i)–iii), определяются автоматически (см. [11; раздел 3]). Мы привели определение частичного действия в таком виде, чтобы связь его с предложением 5.3 была прозрачной.

2) Пункт i) описывает условия, необходимые для того, чтобы $\alpha_k(\alpha_l(a))$ в ii) было определено. Легко установить также, что i) можно эквивалентным способом задать в виде

i′) $\alpha_k(J_{-k} \cap J_l) = J_k \cap J_{k+l}$, $k, l \in \mathbb{Z}$

(ср. (82) и (88)).

3) По аналогии с введенным понятием можно ввести частичную C^*-динамическую систему для произвольной дискретной группы (см., например, [12]), однако в рамках настоящей работы естественно ограничиться случаем группы $\mathbb{Z}$.

Обозначим через Δ набор множеств D_k, $k \in \mathbb{Z}$, и отображений δ_k, $k \in \mathbb{Z}$, введенных в определении 5.2. Если $\mathscr{A}$ – алгебра коэффициентов, содержащая единицу, то в общей ситуации $(\mathscr{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ является более общим объектом, чем частичная C^*-динамическая система: свойства i)–iii) из определения 5.5 выполняются, но для $k > 0$ множества D_k не являются идеалами, а лишь подалгебрами в $\mathscr{A}$ (предложение 5.3).

В силу предложения 2.2 алгебру коэффициентов $\mathscr{A}$ можно определить тремя условиями:

$$\delta(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \qquad \delta_*(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}, \qquad \delta_*(1) \in \mathscr{A}'. \tag{89}$$

Если же в дополнение к условиям (89) потребовать выполнения условия

$$\delta(1) \in \mathscr{A}', \tag{90}$$

то для такой алгебры $(\mathscr{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ уже является частичной C^*-динамической системой.

Отметим также, что в коммутативной ситуации (для алгебр, описанных в предложениях 4.1, 4.3) $(\mathscr{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ является частичной C^*-динамической системой.

§ 6. Алгебры коэффициентов, порожденные полярным разложением

Проведенный выше анализ показывает, что все примеры алгебр, являющихся представлениями частичных динамических систем (группы $\mathbb{Z}$), а также алгебры, генерированные эндоморфизмами, порожденными изометриями, являются примерами алгебр рассматриваемого в настоящей работе типа, в частности, сюда войдут частичные скрещенные произведения (с группой $\mathbb{Z}$), тёплицевы алгебры, алгебра группы $\mathbb{Z}$ и т.п.

В этом параграфе мы представим еще два интересных примера алгебр коэффициентов, важных со многих точек зрения и, в частности, в связи с приложениями в теории квантовых физических систем.

Пример 1. Пусть $a \in L(H)$ – некоторый оператор и

$$a = U|a| \tag{91}$$

– стандартное полярное разложение a. Здесь $|a| = \sqrt{a^*a}$ и U – частичная изометрия, заданная условием

$$U(|a|\xi) = a\xi, \qquad \xi \in H. \tag{92}$$

В качестве алгебры $\mathscr{A}_0$ мы возьмем коммутативную C^*-алгебру

$$\mathscr{A}_0 = \overline{\{1, |a|\}}. \tag{93}$$

Далее в данном примере мы будем предполагать выполненным условие

$$aa^* \in \mathscr{A}_0. \tag{94}$$

Замечание. C^*-алгебры, удовлетворяющие условию (94), являются естественным обобщением алгебр, в которых выполнено условие

$$aa^* = \gamma(a^*a), \tag{95}$$

где γ – непрерывная неотрицательная функция на спектре оператора a^*a. В “простейшей” ситуации, когда γ является линейной функцией

$$aa^* = qa^*a + h, \tag{96}$$

эти алгебры включают следующие классы:

(i) коммутативные алгебры, порожденные нормальными операторами:

$$a^*a = aa^*$$

$(q=1,\, h=0)$, теория которых составляет базу спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах;

(ii) тёплицева алгебра:

$$aa^* = 1$$

$(q=0, h=1)$;

(iii) алгебры Гейзенберга:

$$aa^* \mp a^*a = h \tag{97}$$

$(q=\pm 1,\, h>0)$; в случае $q=1$ мы здесь, в действительности, выходим за рамки теории C^*-алгебр – операторы, удовлетворяющие соответствующему условию, являются *неограниченными* и играют принципиальную роль в квантовой механике (связаны с операторами положения и момента);

(iv) в общем случае $(-1<q<1,\, q\neq 0,\, h\neq 0)$ алгебру, порожденную отношением (96), естественно рассматривать как q-деформацию алгебры Гейзенберга. Модели квантовой механики, основанные на q-деформации алгебры Гейзенберга, изучались, например, в [28].

Заметим, что так как в ситуации, рассматриваемой в данном примере, оператор U^*U является ортогональным проектором на $\overline{\operatorname{Im}|a|} = (\operatorname{Ker}|a|)^{\perp}$, то U^*U является спектральным проектором оператора $|a|$, соответствующим множеству $\sigma(|a|)\setminus\{0\}$ (где через $\sigma(\alpha)$ мы обозначаем спектр оператора α). Таким образом, согласно спектральной теореме (см., например, [29; § 17])

$$U^*U \in \overline{\{1,|a|\}}'' = \mathscr{A}_0'', \tag{98}$$

где $\mathscr{A}_0''$ – бикоммутант $\mathscr{A}_0$ (т.е. алгебра фон Неймана, порожденная алгеброй $\mathscr{A}_0$). В частности,

$$U^*U \in \mathscr{A}_0'. \tag{99}$$

Поэтому согласно предложению 2.2 отображение

$$\delta\colon \mathscr{A}_0 \to \mathscr{L}(\mathscr{H}) \tag{100}$$

является морфизмом и U, $\mathscr{A}_0$ удовлетворяют условию (2).

Следующая теорема описывает ряд свойств $\mathscr{A}_0$ и U, вытекающих из условия (94).

Теорема 6.1. *Пусть U – частичная изометрия, определенная полярным разложением* (91) *оператора a, удовлетворяющего* (94), *тогда*:

(i)

$$\delta^k(\overline{\{|a|\}}) \subset \overline{\{1,|a|,UU^*,\dots,U^{k-1}U^{*k-1}\}}, \qquad k=1,2,\dots; \tag{101}$$

(ii) *δ является эндоморфизмом C^*-алгебры*

$$\overline{\{1,|a|,UU^*,\dots,U^kU^{*k},\dots;\ k=1,2,\dots\}};$$

(iii)

$$U^kU^{*k} = \delta^k(1) \in \mathscr{A}_0'', \qquad k=0,1,\dots; \tag{102}$$

(iv) *для* $1 \leqslant k \leqslant l$

$$U^*U^kU^{*l} = U^{k-1}U^{*l}, \qquad UU^{*k}U^l = U^{*k-1}U^l; \tag{103}$$

(v) *для* $k, l \in \mathbb{N}$

$$[U^{*l}U^l, U^kU^{*k}] = 0. \tag{104}$$

Доказательство. (i) Заметим, что свойство (94) означает, что

$$\delta(|a|^2) = U|a|^2U^* \in \overline{\{1, |a|\}}. \tag{105}$$

Так как $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом, то

$$[\delta(|a|)]^2 = \delta(|a|^2) \in \overline{\{1, |a|\}}.$$

Поэтому из (105) вытекает

$$\delta(|a|) \in \overline{\{1, |a|\}}. \tag{106}$$

Итерируя (106), получаем (i).

(ii) Утверждение следует из (i) и того факта, что $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом.

(iii) Выше уже было отмечено, что U^*U является спектральным проектором, соответствующим промежутку $(0, \|a\|]$. Поэтому существует последовательность α_n элементов из $\overline{\{|a|\}}$ такая, что

$$\alpha_n \xrightarrow{\text{сильно}} U^*U. \tag{107}$$

Значит,

$$U\alpha_nU^* \xrightarrow{\text{сильно}} U(U^*U)U^* = UU^*.$$

Так как (согласно (i)) $U\alpha_nU^* \in \overline{\{1, |a|\}}$, то $UU^* \in \overline{\{1, |a|\}}''$.

Далее проведем доказательство по индукции.

Предположим, что $U^kU^{k*} \in \overline{\{1, |a|\}}''$, $k = \overline{1, n-1}$. Выбирая вышеупомянутую последовательность α_n, получаем

$$U^n\alpha_nU^{n*} \xrightarrow{\text{сильно}} U^n(U^*U)U^{n*} = U^{n-1}(UU^*U)U^{n*} = U^nU^{n*}. \tag{108}$$

Но согласно (i) и предположению индукции мы имеем

$$U^n\alpha_nU^{n*} \in \overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^{n-1}U^{n-1*}\}} \subset \overline{\{1, |a|\}}''.$$

Поэтому из (108) вытекает $U^nU^{n*} \in \overline{\{1, |a|\}}''$. Итак, (iii) доказано.

(iv), (v) Из (iii) имеем

$$\overline{\mathscr{A}} := \overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^kU^{*k};\ k = 1, 2, \dots\}} \subset \mathscr{A}_0'',$$

в частности, алгебра $\overline{\mathscr{A}}$ коммутативна.

Ввиду (ii) отображение $\delta\colon \overline{\mathscr{A}} \to \overline{\mathscr{A}}$ является эндоморфизмом, и, как было отмечено,

$$U^*U \in \mathscr{A}_0'' \subset \overline{\mathscr{A}}'.$$

Вспоминая эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2, заключаем, что $\overline{\mathscr{A}}$ и U удовлетворяют условиям предложения 3.6. Поэтому (iv) и (v) верны.

Замечание 6.2. Большинство из свойств, перечисленных в теореме 6.1, известны (мы привели их для полноты изложения). В частности, обобщения свойства (v) и обобщения некоторых ситуаций из (i) можно найти в предложениях 28 и 29 раздела 2.1 из [6], этот раздел содержит также много иной важной информации о рассматриваемом нами предмете.

В качестве следствия перечисленных свойств и результатов, полученных в § 4, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 6.3. *Пусть U – частичная изометрия, определенная полярным разложением* (91) *оператора a, удовлетворяющего* (94), *и* $\mathscr{A}_0 = \overline{\{1, |a|\}}$, *тогда*:

(i)
$$E(\mathscr{A}_0) = \{\mathscr{A}_0, UU^*, \dots, U^k U^{*k}, \dots\} \tag{109}$$
и $E(\mathscr{A}_0)$ является коммутативной $*$-алгеброй, удовлетворяющей условиям (2) *и* (3), *а отображение* $\delta\colon E(\mathscr{A}_0) \to E(\mathscr{A}_0)$ *является эндоморфизмом*;

(ii) *алгебра $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ является коммутативной алгеброй коэффициентов, и оба отображения* $\delta\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ *и* $\delta_*\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ *являются эндоморфизмами.*

Доказательство. Из утверждений (i), (iii) теоремы 6.1 и из (98) вытекают свойства (56) и (57). Значит, согласно предложению 4.3 алгебра $E(\mathscr{A}_0)$ является коммутативной $*$-алгеброй, удовлетворяющей (2) и (3), и отображение $\delta\colon E(\mathscr{A}_0) \to E(\mathscr{A}_0)$ является эндоморфизмом; кроме того, $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ является коммутативной алгеброй коэффициентов и отображения $\delta\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ и $\delta_*\colon E_*(E(\mathscr{A}_0)) \to E_*(E(\mathscr{A}_0))$ являются эндоморфизмами.

Равенство (109) вытекает из утверждения (i) теоремы 6.1.

Пример 2. Рассмотрим частичную изометрию $U \in L(H)$ и положительный оператор $0 \leqslant Q \in L(H)$, удовлетворяющие условиям

$$U^*U = \delta_*(1) \in \{Q\}'' = \mathscr{A}_0'', \tag{110}$$
$$\delta(Q) = UQU^* = qQ, \tag{111}$$

где $\mathscr{A}_0 = \{1, Q\}$ и $0 < q < 1$.

Примером операторов с такими свойствами является пара: односторонний сдвиг U и диагональный оператор Q, действующие в стандартном дискретном пространстве l^2 по формулам

$$\begin{aligned} &U(e_n) = e_{n-1}, \quad U(e_0) = 0, &&n = 1, 2, \dots, \\ &Q(e_n) = q^n e_n, &&n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где e_n, $n = 0, 1, \dots,$ – канонический ортонормированный базис в l^2. Подобные операторы естественно возникают в связи с моделированием различных q-деформаций физических систем.

Согласно предложению 2.2 отображение $\delta\colon \mathscr{A}_0 \to L(H)$ является морфизмом и, кроме того, из (111) следует, что

$$\delta(f(Q)) = f(qQ) \tag{112}$$

для любой функции $f \in C(\sigma)$ такой, что $f(0) = 0$ (здесь $C(\sigma)$ – алгебра непрерывных функций на спектре σ оператора Q). Из (112) мы заключаем, что δ отображает алгебру $\{Q\}$ в себя и, следовательно, условие

$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathscr{A}_0)' \tag{113}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$[U^*U, \delta^n(1)] = 0, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{114}$$

Используя рассуждения, примененные в доказательстве утверждения (iii) теоремы 6.1 и применяя (110) вместо (98), можно показать, что

$$\delta^n(1) \in \mathscr{A}_0'', \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{115}$$

что вместе с (110) доказывает (114) и (113).

Аналогичным образом условие

$$\mathscr{A}_0 \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathscr{A}_0)'$$

может быть сведено к условию

$$[a, \delta^n(1)] = 0, \qquad n = 1, 2, \dots, \quad a \in \mathscr{A}_0,$$

которое также выполняется ввиду (115).

Поэтому из предложения 4.3 мы заключаем, что $E_*(E(\mathscr{A}_0))$ – алгебра коэффициентов.

Рассмотрим оператор $a \in \mathscr{B} \subset L(H)$, заданный формулой

$$a := U\rho(Q), \tag{116}$$

где $0 \leqslant \rho \in C(\sigma)$ и

$$U^*U\rho(Q) = \rho(Q). \tag{117}$$

Предложение 6.4. *Операторы a, a^* и Q удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$a^*a = \rho^2(Q), \tag{118}$$
$$aa^* = \rho^2(0)UU^* + \widetilde{\rho}(qQ), \tag{119}$$

где $\widetilde{\rho}(t) = \rho^2(t) - \rho^2(0)$; *в частности, если* $\rho(0) = 0$, *то*

$$aa^* = \rho^2(qQ), \tag{120}$$
$$aQ = qQa, \tag{121}$$
$$Qa^* = qa^*Q. \tag{122}$$

Доказательство. Равенство (118) вытекает непосредственно из (116) и (117).

Равенство (119) вытекает из (112) и определения функции $\widetilde{\rho}(t)$.

Для того чтобы проверить (121), заметим, что из свойства (111) следует

$$Ub = \delta(b)U, \qquad b \in \mathscr{A}_0. \tag{123}$$

Заменяя здесь b на Q и используя (111), получаем

$$UQ = qQU, \tag{124}$$

что, в свою очередь, дает

$$U\rho(Q) = \rho(qQ)U. \tag{125}$$

Из (125) вытекает

$$aQ = U\rho(Q)Q = \rho(qQ)qQU = qQU\rho(Q) = qQa.$$

Итак, (121) доказано.

Наконец, (122) получается из предыдущей формулы переходом к сопряжению.

C^*-алгебра $\mathscr{B}_\rho := \mathscr{B}(1, a, Q)$, порожденная операторами 1, a и Q, удовлетворяющими (118)–(122), является C^*-подалгеброй алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{A}_0, U)$.

В специальном случае, когда $0 \leqslant Q \leqslant 1$, $UU^* \in \mathscr{A}_0$ и

$$\rho(Q) = \frac{1-Q}{1-q}\,, \tag{126}$$

алгебра $\mathscr{B}_\rho$ оказывается q-деформацией алгебры Гейзенберга (см. [28]). В ситуации, когда

$$\rho^2(Q) = -\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}\left(\frac{q}{Q} + Q\right)\frac{1}{(1-q)^2}\,, \tag{127}$$

$\mathscr{B}_\rho$ является q-деформацией $U_q(\mathrm{Sl}(2))$ обертывающей алгебры $\mathrm{Sl}(2)$ (см. [30]).

В общей ситуации алгебра $\mathscr{B}_\rho$ изучалась в [30] в связи с исследованием приложений данного объекта к теории гипергеометрических рядов и интегрируемых физических систем.

Алгебры типа $\mathscr{B}_\rho$ естественным образом появляются также и в квантовой оптике, а именно при квантовой редукции мультимодальной квантовой оптической системы. Редуцируя степени свободы рассматриваемой квантовой системы, можно перейти от алгебры Гейзенберга с несколькими степенями свободы к алгебре, заданной соотношениями (118)–(122). При этом операторы a^* и a интерпретируются как кластерные операторы рождения и уничтожения. По поводу полного описания этого важного для физики приложения см. [8].

Список литературы

1. *Davidson K. R.* C^*-algebras by example. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Fields Inst. Monogr. V. 6.)
2. *Pedersen G. K.* C^*-algebras and their automorphism groups. New York: Academic Press, 1979.
3. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory. Harlow: Longman, 1994.
4. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 1: Equations with continuous coefficients. Harlow: Longman, 1998.
5. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 2: Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. Harlow: Longman, 1998.
6. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators. Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 1999.
7. *Odzijewicz A., Horowski M., Tereszkiewicz A.* Integrable multi-boson systems and orthogonal polynomials // J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 4353–4376.
8. *Horowski M., Odzijewicz A., Tereszkiewicz A.* Some integrable systems in nonlinear quantum optics // `arXiv:math-ph/0207031`, 2002.
9. *Boyd S., Keswani N., Raeburn I.* Faithful representations of crossed products by endomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. № 2. P. 427–436.
10. *Adji S., Laca M., Nilsen M., Raeburn I.* Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. № 4. P. 1133–1141.
11. *Exel R.* Circle actions on C^*-algebras, partial automorhisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence // J. Funct. Anal. 1994. V. 122. P. 361–401.
12. *McClanachan K.* K-theory for partial crossed products by discrete groups // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 77–117.
13. *Sieben N.* C^*-crossed products by partial actions and actions of inverse semigroups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1997. V. 63. P. 32–46.
14. *Paterson Alan L. T.* Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras. Boston, MA: Birhäuser, 1999. (Progr. Math. V. 170.)
15. *Lebedev A., Odzijewicz A.* On the structure of C^*-algebras generated by the components of polar decomposition // `arXiv:math.OA/0208200`, 2002.
16. *Халмош П. Р.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
17. *Exel R.* Amenability for Fell bundles // J. Reine Angew. Math. 1997. V. 492. P. 41–73.
18. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Изд-во Университетское, 1988.
19. *Бреннер В. В.* О спектральном радиусе операторов с локально независимыми сдвигами // Изв. АН БССР. 1981. № 3. С. 48–85.
20. *Бреннер В. В.* Операторы с локально независимыми сдвигами // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск, 1981.
21. *Бреннер В. В.* О спектральном радиусе операторов со сдвигом // УМН. 1982. Т. 37. № 1. С. 139–140.

22. *Бреннер В. В.* О символических последовательностях. I // Деп. в ВИНИТИ. 1983. №4399-83.
23. *Бреннер В. В.* О символических последовательностях. II // Деп. в ВИНИТИ. 1983. №4400-83.
24. *Антоневич А. Б.* О двух методах исследования обратимости операторов в C^*-алгебрах, индуцированных динамическими системами // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166). №1. С. 3–23.
25. *Beurling A.* Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application a une transformation fonctionnelle // IX Congr. Math. Scand. 1938. P. 345–366.
26. *O'Donovan D. P.* Weighted shifts and covariance algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 208. P. 1–25.
27. *Лебедев А. В.* О некоторых C^*-методах, используемых при исследовании алгебр, ассоциированных с автоморфизмами и эндоморфизмами // Деп. в ВИНИТИ. 1987. №5351-В87.
28. *Maximov V., Odzijewicz A.* The q-deformation of quantum mechanics of one degree of freedom // J. Math. Phys. 1995. V. 36. №4. P. 1681–1690.
29. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
30. *Odzijewicz A.* Quantum algebras and q-special functions related to coherent states maps of the disc // Commun. Math. Phys. 1998. V. 192. P. 183–215.

Минск (Беларусь),
Белосток (Польша)
E-mail: lebedev@bsu.by,
aodzijewicz@physics.uwb.edu.pl

Поступила в редакцию
17.07.2003 и 21.01.2004