БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Факультет философии и социальных наук

В. А. Еровенко, М. В. Мартон

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КУРСА «ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ» ДЛЯ ФИЛОСОФОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ–ЗАОЧНИКОВ

МИНСК
2009

УДК 51 (076)
ББК 22.1я73
Е76

Рекомендовано Ученым советом
Механико-математического факультета
17 ноября 2009 г., протокол № 2

Рецензенты:
А. Г. Алехно,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики и информатики БГУ;
Н. В. Михайлова,
кандидат философских наук, доцент,
заведующая кафедрой социально–гуманитарных дисциплин МГВРК

Еровенко В. А.
Е76 Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: методическое пособие для студентов–заочников / В. А. Еровенко, М. В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.

Методическое пособие представляет собой избранные главы курса «Основы высшей математики» для студентов-философов заочного отделения классического университета, изучающих основы высшей математики в течение одного семестра. Пособие состоит из предисловия «Университетский стандарт основ высшей математики в философском образовании», глав «Элементы теории множеств», «Элементы теории вероятностей» и заключения «Об общем математическом образовании студентов–философов». В методическом пособии приводится большое количество разобранных математических примеров и задач с философско–гуманитарным контекстом.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Современная математика является важнейшей частью мировой культуры, поэтому для связи того, что делается в математике с другими областями научного знания необходимо участие философов. Без современной математики невозможно сформировать современное мировоззрение и интегрировать университетское образование в культуру, поскольку благодаря мировоззренческой широте своих концепций математика стала важнейшей общеобразовательной и философской дисциплиной. Сущность взаимодействия математики и философии состоит в том, что математическое знание дает точные аргументы, позволяющие в условиях многозначности философских определений сохранять свободу мысли.

Главной целью курса «Основы высшей математики» для философов–заочников является формирование у студентов надежной интуиции относительно встречаемых ими математических объектов. Под математические структуры можно подвести многие реальные явления, поскольку математические понятия содержат потенциально неисчерпаемое многообразие интерпретаций. Мировоззренческая роль математического образования для студентов–философов проявляется в том, что оно помогает понять суть явлений, происходящих в окружающем нас мире. Культурная роль математического образования для философов состоит в том, что, в соответствии с образовательными функциями математики она способствует повышению общематематической культуры и философской культуры мышления. Воспитательная роль общего математического образования будущих философов проявляется в том, что изучение математики вырабатывает исследовательский подход к философской работе, основанный на логичности, непротиворечивости и полноте суждений.

Учебный курс «Основы высшей математики» для студентов–философов заочного отделения факультета философии и социальных наук Белорусского государственного университета рассчитан на 16 часов: 10 часов лекций, 6 часов практических занятий. Студенты изучают данную дисциплину на протяжении одного семестра. Курс «Основы высшей математики» состоит из двух основных тем – это «Элементы теории множеств» и «Элементы теории вероятностей». В качестве методической основы этой учебной дисциплины взят эксклюзивный курс лекций профессора В.А. Еровенко «Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры», адаптированный для студентов–философов заочного отделения. Доступные доказательства приведенных в этом методическом пособии утверждений можно найти в указанном курсе лекций. Заметим, что выбор учебных тем был обусловлен, в первую очередь, авторским видением их полезности и важности для математического образования студентов–философов, а во вторую, небольшим количеством часов, выделенным на этот университетский курс. Объяснить этот выбор можно следующим образом. Выбор темы, связанной с элементами теории множеств, как правило, никогда не вызывает сомнений в любом курсе математики для гуманитариев, так как, с одной стороны – это рабочий язык современной математики, а с другой – на примере бесконечных множеств Кантора можно попытаться объяснить сущность взаимодействия философии и математики в решении вечной проблемы бесконечности.

Отметим также, что в любом философско-гуманитарном знании, претендующем на научность, точнее связанном с количественными выкладками, наиболее востребованным разделом математики является теория вероятностей и математической статистики. Кроме того, отдельного упоминания в студенческой аудитории будущих философов заслуживает философский анализ математической сути понятия случайного, что и рассматривается в разделе математики случайного.

Методическое пособие представляет собой краткий курс лекций для студентов–заочников из образовательного стандарта. Полный курс «Основы высшей математики» разработан и читается профессором В. А. Еровенко для студентов–философов дневного отделения ФФСН, избранные главы которого читаются доцентом М. В. Мартон на заочном отделении ФФСН. Лекции каждой темы сопровождаются пояснительными примерами, а так же для каждого раздела приведены «задачи с комментариями», разобрав которые можно самостоятельно прорешать задачи, которые приводятся в конце каждой темы. Данное методическое пособие содержит необходимый математический минимум, позволяющий студентам–философам заочного отделения факультета философии и социальных наук Белорусского государственного университета, самостоятельно изучить и проработать отдельные темы, читаемые в курсе «Основы высшей математики».

Для понимания материала методического пособия по курсу «Основы высшей математики» для студентов–философов заочного отделения вполне достаточно стандартных знаний и умений в объеме программы средней общеобразовательной школы, так как основной упор сделан не на техническую, а логическую составляющую курса. При подготовке этого методического пособия авторы ориентировались на концепцию обучения математике студентов философских и социально-гуманитарных специальностей Белорусского государственного университета, успешно разрабатываемую и реализуемую на кафедре общей математики и информатики ММФ БГУ, университетский стандарт которой для студентов–философов представлен в Предисловии этого методического пособия.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить рецензентов пособия профессора А.Г. Алехно и доцента Н.В. Михайлову за конструктивную помощь и моральную поддержку, а также весь дружный коллектив кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета за создание комфортной интеллектуально-психологической среды при работе над этим методическим пособием.

ПРЕДИСЛОВИЕ

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ СТАНДАРТ ОСНОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ФИЛОСОФСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Ученые Древней Греции в философии и в математике развивали рациональную сторону духовной культуры, демонстрируя при этом единство науки. В эллинскую эпоху математика наравне с философией была областью «чистого знания», хотя в то же время она могла быть отнесена и к естественным наукам. Вообще говоря, философское и конкретно-научное образование различаются своими способами познания окружающего мира. Отличительная особенность философии состоит в том, что сфера ее методологических интересов направлена на теоретическое познание, точнее на рационально-теоретическое постижение мира, что, безусловно, сближает ее с математикой.

Классический образ математики традиционно ассоциируется с такими ее чертами, или в современной методической терминологии – компетенциями, как доказательность, логичность, обоснованность, а также, связанные с ними критериями истинности – непротиворечивости, полноты и системности. В конце прошлого века классический образ науки претерпел в общественном сознании существенные изменения. Говоря о классическом университетском математическом образовании студентов-философов, свою образовательную деятельность мы позитивируем как квинтэссенцию научной рациональности, воплощающую высшее философско-математическое познание. В наше время, переполненное ненаучными формами духовного освоения мира, такой подход к современному образованию можно считать «альтернативным» к культивируемому сейчас коммерческому образованию.

Новые образовательные стандарты для философских и социально-гуманитарных специальностей, включающие в себя математическую составляющую – это в целом результат большой терпимости «лириков» по отношению к «физикам», точнее результат лучшего знания и понимания естественнонаучной культуры, которая избавляет нас от невежества и самоуверенности в суждениях. Перефразируя популярную максиму «счастье любви в том, чтобы любить», мы можем сказать, что «достоинство хорошего образования в том, чтобы получать удовольствие и радость от образования». Тогда образованный человек не станет свалкой бесполезной, бессмысленной и не связанной между собой рекламно-клиповой информацией, а сможет самостоятельно выявлять все нужное и полезное.

Философское и конкретно-научное образование различаются своими способами познания окружающего мира. Отличительная особенность философии состоит в том, что сфера ее методологических интересов направлена на теоретическое познание, точнее на рационально-теоретическое постижение мира, что, безусловно, сближает ее с общей математикой. Авторы статьи в разное время читали курс «Основы высшей математики» для студентов-философов на дневном и заочном отделениях факультета философии и социальных наук Белорусского государственного университета. Они также являются соавторами соответствующей типовой учебной программы «Основы высшей математики» по специальности «философия» для вузов Республики Беларусь (авторы этой программы: профессор В. А. Еровенко, доцент С. В. Демьянко и доцент М. В. Мартон), отдельные фрагменты которой представлены ниже.

<u>Пояснительная записка</u>

Современная математика является важнейшей частью мировой культуры, поэтому для связи того, что делается в математике с другими областями научного знания необходимо участие философов. Без современной математики невозможно сформировать современное мировоззрение и интегрировать университетское образование в культуру, поскольку благодаря мировоззренческой широте своих концепций математика стала важнейшей общеобразовательной и философской дисциплиной. Сущность взаимодействия математики и философии состоит в том, что математическое знание дает точные аргументы, позволяющие в условиях многозначности философских определений сохранять свободу мысли.

Притягательность математики для философов связана с феноменальной устойчивостью и неопровержимостью математических результатов. Эффективность математического анализа явлений связана с тем, что окружающему нас миру присуща скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых и эффективных математических законов. Современная математика остается эффективным способом открывания истины и создания реальности, с помощью которой можно не только увидеть мир по-другому, но и переформулировать старые философские проблемы в контексте мировосприятия нового века. Философия дополняется математикой, поскольку математика помогает философии выявлять общие закономерности реального мира, используя для этого язык математики.

Главной целью курса «Основы высшей математики» для философов является формирование у студентов надежной интуиции относительно встречаемых ими математических объектов. Под математические структуры можно подвести многие реальные явления, поскольку математические понятия содержат потенциально неисчерпаемое многообразие интерпретаций. Сила математики заключается в мощных методах преобразования записанной на ее языке информации, находящих свое выражение в строгих доказательствах теорем и фундаментальных математических конструкциях. В таком контексте роль математического образования философов сводится к выработке понимания того, что в мире абстрактных структур математики нужно работать логическими методами.

В результате изучения дисциплины *студенты должны знать:*

- основные методы решения важнейших задач исследования реального мира, не содержащих сложных вычислений, используемых в профессиональной деятельности, содержание которой не требует использования математических знаний, выходящих за пределы потребностей повседневной жизни;
- важнейшие фрагменты истории, методологии и философии математики, а также ход ее внутреннего развития и социально-культурной эволюции в контексте неразрывной взаимосвязи математики, естественнонаучного знания и гуманитарной культуры в целом;
- наиболее существенные черты математики, в частности ее эффективность, которая достигается на основе многоступенчатого движения математики к абстрактному, достигая при этом такой общности своего языка и методов, которая обеспечивает ее универсальности и применимость;
- природу математических абстракций и принципы построения научных теорий в едином процессе развития математики совместно с естественными и гуманитарными науками, с целью формирования эвристического и алгоритмического стиля мышления;
- основные математические структуры, описываемые с помощью системы аксиом, расширяющие выразительные возможности математики и создающие основу для конструирования общих принципов, объединяющих современную математику и подчеркивающих ее внутреннее единство;

Кроме того, *студенты должны уметь:*

- понимать смысл поставленной задачи и уметь правильно, логично и строго рассуждать, делать правдоподобные оценки, овладевая навыками современного стиля мышления, требующего умелого сочетания формального и неформального подходов исследования;
- реализовывать возможности современной математики, ее идеализаций при переходе к математической модели в формировании научного мировоззрения студентов, способствующего освоению ими научной картины мира и эффективной связи с реальным миром;

- применять математический язык и математический аппарат в качестве средства описания и исследования окружающего мира и его закономерностей для адекватного ориентирования в нем, целенаправленно расширяя и углубляя свои умения и знания;
- развивать формы абстрактного мышления и, прежде всего, ее дедуктивную составляющую, характерную для математики и ее методов исследования, при изучении на современном уровне университетских предметов естественнонаучного и гуманитарного циклов;
- формулировать правдоподобные гипотезы, лежащие в основании теоретической научной модели, описывающей реальную ситуацию, для исследования которой может понадобиться привлечение разнообразных математических и нематематических сведений.

Мировоззренческая роль математического образования философов состоит в том, что оно помогает понять суть явлений, происходящих в окружающем нас мире. Культурная роль математического образования философов состоит в том, что, в соответствии с функциями математики она способствует повышению общематематической культуры и философской культуры мышления. Воспитательная роль математического образования философов состоит в том, что изучение математики вырабатывает исследовательский подход к философской работе, основанной на логичности, непротиворечивости и полноте суждений.

Хорошее образование, основанное на продуктивной предметности, в широком смысле можно рассматривать, как умение математически грамотно действовать при нынешних социально-экономических потрясениях, а также по философски рассудительно в сложных житейских ситуациях. Хотя иногда «лучше переждать, чем не дождаться», кризисное состояние массового университетского образования не оставляет времени на добротный анализ его состояния и наиболее убедительную дополнительную аргументацию. Противостояние «физиков» и «лириков» во второй половине прошлого века спровоцировало впечатление, сохранившее свою актуальность, что есть методологическая несовместимость между математикой и социально-гуманитарным знанием. Однако история современной науки показывает и доказывает, что такой основополагающей несовместимости не существует.

Учебный курс «Основы высшей математики» для философов рассчитан на 34 часа: 18 часов лекций, 12 часов практических занятий и 4 часа КСР. Студенты изучают данную дисциплину на протяжении одного семестра.

Примерный тематический план

Названия разделов и тем	Лекции, час	Практические занятия, час	Всего, Час
Раздел I. Введение в аксиоматический метод			
1.1 Основные этапы становления понятий современной математики и характерные черты математического мышления	2		2
1.2 Представление об аксиоматическом методе построения математики. Аксиоматика Пеано натурального ряда чисел и законы арифметики	2		2
Раздел II. Элементы теории множеств			
2.1 Представление об общих свойствах конечных или бесконечных множеств и возможности их количественного	2	2	4

сравнения			
2.2 Операции над множествами, их основные свойства и их использование в идее классификации	2	4	6
Раздел III. Введение в комбинаторный анализ			
3.1 Основные комбинаторные принципы и комбинаторные модели для упорядоченных и неупорядоченных наборов	2	2	4
3.2 Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов	2	2	4
Раздел IV. Элементы математики случайного			
4.1 Классическая вероятность случайного события и философско-методологические проблемы становления аксиоматики теории вероятностей	2	2	4
4.2 Методы определения вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей	2	4	6
Раздел V. Введение в философию математики			
5.1 Проблема обоснования математики с точки зрения философско-методологических понятий непротиворечивости и полноты	1		1
5.2 Философские проблемы, касающиеся природы математических доказательств	1		1
Всего:	18	16	34

Заметим, что выбор тем был обусловлен, в первую очередь, авторским видением их полезности и важности для математического образования философов, а во вторую, небольшим количеством часов, выделенным на этот курс. Промотивировать этот выбор можно следующим образом. Нередко в философских и вообще гуманитарных работах встречаются обороты типа «очевидно как дважды два четыре». Заметим, что для математиков это стало очевидным с математической точки зрения только в конце XIX века, после появления аксиоматики Пеано для натуральных чисел.

На примере этой аксиоматики – простой, наглядной и доступной, даже математически неудовлетворительно подготовленному студенту – легко строго аргументировано, убедительно и мотивировано показать роль и сущность аксиоматического метода в структуре современной математики. Выбор темы, связанной с элементами теории множеств, как правило, никогда не вызывает сомнений в любом курсе математики для гуманитариев, так как, с одной стороны – это рабочий язык современной математики, а с другой – на примере бесконечных множеств Кантора можно попытаться объяснить сущность взаимодействия философии и математики в решении вечной проблемы бесконечности.

Далее заметим, что в любом философско-гуманитарном знании, претендующем на научность, точнее связанном с количественными выкладками, наиболее востребованным разделом математики является теория вероятностей и математической статистики. Кроме того, отдельного упоминания в студенческой аудитории будущих философов заслуживает философский анализ математической сути понятия случайного, что и рассматривается в разделе математики случайного. Наконец, курс математики для философов вполне естественно закончить философско-методологическими проблемами обоснования самой математики.

В проекте «Идея университета» английского мыслителя и педагога XIX века Джона Ньюмена упор делается на качественное образование, в котором исключительно утилитарное обучение не занимает ведущее место. В наше время не существует опасности избыточного образования, опасность как раз заключается в другом. Еще в позапрошлом веке Джон Ньюмен писал: «Позволю себе сказать о практической ошибке последних двадцати лет – это не просто нагрузка студентов массой неусвоенных знаний, но насилие таким их количеством, что студент отвергает все целиком»[1]. Это традиционная методическая ошибка перегрузки студентов «бессмысленным массивом» учебных предметов, точнее ненужными разделами непрофильных для них дисциплин. Она возникает в предположении гипотетически возможной пользы от дилетантского знакомства с этими предметами, хотя это и не связано с интеллектуальным ростом студентов, который при таком подходе скорее нарушается. В такой образовательной ситуации особенно важен методически правильный отбор тем по курсу математики для философов.

Современная ситуация с качеством образования осложняется еще тем, что на смену идеалу научно-рациональной деятельности как учебно-сложной и строго организованной системы пришли его упрощенные «суррогаты» из специальных разновидностей квазинауки, паранауки и псевдонауки. К чести классического университетского математического образования можно отнести то, что даже в «смутные» времена социально-общественных перемен математики не ставили под сомнение то, что их фундаментальная наука в своей основе – это, прежде всего, научно-рациональная деятельность, опирающаяся на систему хорошо доказанных и обоснованных процедур.

Изложим теперь более подробно содержание тем учебного материала по курсу «Основы высшей математики» для студентов-философов.

Раздел I. Введение в аксиоматический метод

Тема 1.1 Основные этапы становления понятий современной математики и характерные черты математического мышления.

Методологическая проблема преподавания основ высшей математики для философов как проблема построения смысла, в отличие от проблемы уровня строгости изложения. Некоторые расхождения между философским языком и языком математики, связанные со способом передачи информации.

Тема 1.2 Представление об аксиоматическом методе построения математики. Аксиоматика Пеано натурального ряда чисел и законы арифметики.

Аксиомы Пеано для натуральных чисел. Понятие независимости аксиом на примере независимости аксиом Пеано. Различная интерпретация аксиоматики натурального ряда чисел Пеано. Аксиоматическое определение арифметических операций и доказательство некоторых свойств арифметических операций.

Раздел II. Элементы теории множеств

Тема 2.1 Представление об общих свойствах конечных или бесконечных множеств и возможности их количественного сравнения.

Интуитивное определение Кантора понятия множества. Философское понятие актуальной и потенциальной бесконечности. Различие свойств конечных и бесконечных множеств на основе понятия взаимно-однозначного соответствия.

[1] Ньюмен Дж.Г. Идея университета. – Минск: БГУ, 2006. – С. 129.

Тема 2.2 Операции над множествами, их основные свойства и их использование в идее классификации.

Определение основных операций над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение. Простейшие свойства для операций объединения и пересечения множеств: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Понятие эквивалентности и его использование в процедуре математического разбиения на классы.

Раздел III. Введение в комбинаторный анализ

Тема 3.1 Основные комбинаторные принципы и комбинаторные модели для упорядоченных и неупорядоченных наборов.

Комбинаторный принцип сложения и комбинаторный принцип умножения. Применение аппарата теории множеств в построении математических моделей комбинаторных задач.

Тема 3.2 Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов.

Вывод формул для подсчета числа перестановок, размещений и сочетаний. Комбинаторные задачи с повторениями и комбинаторные задачи без повторений на примере философских и социально-гуманитарных задач.

Раздел IV. Элементы математики случайного

Тема 4.1 Классическая вероятность случайного события и философско-методологические проблемы становления аксиоматики теории вероятностей.

Определение классической вероятности и решение задач на подсчет классической вероятности с помощью основных комбинаторных формул. Философские определения случайного и вероятностного и их сравнение с соответствующими математическими понятиями.

Тема 4.2 Методы определения вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

Формулы для вероятности суммы несовместных и совместных событий. Формулы для вероятности произведения зависимых и независимых событий. Методы подсчета вероятности сложных событий социально-гуманитарного знания.

Раздел V. Введение в философию математики

Тема 5.1 Проблема обоснования математики с точки зрения философско-методологических понятий непротиворечивости и полноты.

Основные рабочие программы современной математики: формализм, интуиционизм и платонизм. Обоснование математического знания с точки зрения непротиворечивости и полноты в контексте программы теории доказательств Гильберта.

Тема 5.2 Философские проблемы, касающиеся природы математических доказательств.

Анализ философско-методологической природы математического доказательства на примере простейших теорем элементарной и высшей математики. Генезис понятия строгости математического доказательства в современной математике.

Основная литература, рекомендованная по этому курсу

1. Болтянский, В.Г. Беседы о математике / В.Г. Болтянский, А.П. Савин. – М.: ФИМА,

МЦНМО, 2002. – 368 с.
2. Дорофеева, А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности: Учебное пособие для вузов / А.В. Дорофеева. – 2-е изд. и доп. – М.: Дрофа, 2003. – 384 с.
3. Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.
4. Жолков, С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев: Учебник / С.Ю. Жолков. – М.: Гардарини, 2002. – 531 с.
5. Шикин, Е.В. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: Учебник / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. – 2-е изд. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 272 с.

* * *

Закончить обзор, можно сказать «минимального», образовательно-математического стандарта для студентов-философов, рассмотренного выше, хочется ссылкой на знаменитого философа Людвига Витгенштейна, часть работ которого посвящена философии математики. Он очень полезен в студенческой аудитории начинающих философов, поскольку многие уже слышали о нем, но читали его лишь немногие. В «Логико-философском трактате» Раннего Витгенштейна утверждалось, что любые суждения имеют смысл лишь тогда, когда они отражают реальные факты. В духе этого высказывания реальное положение дел с математическим образованием гуманитариев выглядит пока не лучшим образом и виноваты в этом обе стороны. Но, к нашему общему удовлетворению, с Ранним Витгенштейном категорически был не согласен Поздний Витгенштейн, который усматривал смысл во всем, что является практически целесообразным.

Именно это последнее утверждение служит моральной поддержкой для профессиональных носителей современной математической культуры, поскольку математики во все времена хранили платонистскую веру в практическую целесообразность и необходимость своей интеллектуальной деятельности. В споре о приоритетах в философско-гуманитарном образовании можно победить только посредством логики, компоновки смысла и практических аргументов. Но следует заметить, что это не оказывает никакого влияния на гуманитарно-ориентированный разум человека, если он изначально против любой внешней для них точки зрения. Поэтому в налаживании диалога с «правоверными гуманитариями» необходимо попытаться понять чужую точку зрения, не бросая вызов умозаключениям собеседников, занимающих самодостаточную для них оборонительную позицию.

Бездуховность сурово обнажила грубые рыночно-капиталистические отношения между людьми. В наше сложное время все это актуализирует проблему полноценного современного университетского образования. В качественном образовании нравственность, фундаментальность, а также профессионализм, должны все же преодолеть безнравственное, непрактичное и бесполезное образование. Можно надеяться, что хотя бы в ближайшей перспективе «негативно плохое», то есть скучное и некомпетентное образование, может довольно скоро стать хотя бы «позитивно плохим», то есть пусть и неумело, но маскирующим свой полупрофессионализм, а в более далекой перспективе будем надеяться на то, что оно станет все же «избыточно хорошим». Но какими бы благими намерениями мы ни руководствовались, можно не сомневаться в том, что их последствия все равно могут быть самыми непредвиденными.

Тем не менее, позитивная составляющая всех дискуссий на эту тему реализуется в знаменитой аксиоме риторики «что мы скажем, то другой подумает». Если любопытному философу-гуманитарию нравится узнавать интеллектуально новое, то ему трудно пресытиться, так как новому в математике и естественнонаучном знании нет конца[2]. Это на наш взгляд, наиболее эффективный мотив необходимости включения мировоззренчески-познавательного университетского курса «Основы высшей математики» в философско-гуманитарный образовательный стандарт. Для философов-математиков математика сама по себе «воплощенная рациональность», в которой критерии рациональности совпадают с критериями научности. К сожалению, в постсоветское время произошло изменение общей культурно-ценностной парадигмы, определяющей образ жизни человека и основные приоритеты социальных ориентаций.

Знание получает гордый статус науки или философии, когда его подчиняют строгой образовательной цели или заключают в определенные формы рассудочной деятельности. Чем более глубоки знания о мире и человеке, тем более абстрактными становятся научные построения, а в чистоте и строгости таких построений математике все еще нет равных.

Еровенко Валерий Александрович,
доктор физико-математических наук,
профессор;

Мартон Марина Владимировна,
кандидат физико-математических наук,
доцент.

---

[2] См., например, избранные статьи на эту тему профессора В.А. Еровенко с соавторами:
1. Еровенко В.А. Теорема Гёделя и «Онегинский недуг» современного образования / В.А. Еровенко, Н.В. Михайлова // Alma mater. – 2000. – № 4. – С. 32–36.
2. Еровенко В.А. Две культуры Чарлза Сноу в проблеме интуитивного познания / В.А. Еровенко–Риттер // Вышейшая школа. – 2001. – № 5. – С. 47–52.
3. Еровенко В.А. Феномен «Пигмалиона» в социологии, современного языка математики / В.А. Еровенко–Риттер // Alma mater. – 2002. – № 6. – С. 26–31.
4. Еровенко В.А. Парадокс Олдоса Хаксли: к философии математического познания / В.А. Еровенко–Риттер // Беларуская думка. – 2003. – № 12. – С. 35–39.
5. Еровенко В.А. Философско–образовательное значение математики / В.А. Еровенко–Риттер // Педагогика. – 2004. – № 5. – С. 35–39.
6. Еровенко В.А. Математика для гуманитариев: диалог в культуре / В.А. Еровенко // Беларуская думка. – 2005. – № 9. – С. 98–103.
7. Еровенко В.А. К философии гуманитарной математики / В.А. Еровенко, С.Н. Сиренко // Педагогика. – 2006. – № 8. – С. 29–35.
8. Еровенко В.А. Вера в силу знания: к философским проблемам математического образования / В.А. Еровенко // Беларуская думка. – 2007. – № 2. – С. 85–92.
9. Еровенко В.А. «Запрет Витгенштейна» и интеллектуальная целостность математического и философского знания / В.А. Еровенко, С.В. Демьянко // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2008. – № 2. – С. 3–8.
10. Еровенко В.А. «Максима Канта» и общее математическое образование / В.А. Еровенко // Наука и инновации. – 2008. – № 1. – С. 9–12.
11. Еровенко В.А. Математика и философия: чувство онтологического одиночества / В.А. Еровенко, Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2008. – № 2. – С. 3–10.
12. Еровенко В.А. Актуализация артефакта: мировоззренческая проблема взаимодействия математики и философии // Философия и социальные науки. – 2008. – № 3. – С. 44–50.
13. Еровенко В.А. Пророчество Декарта и «наука о воспитании» математической культуры гуманитариев / В.А. Еровенко // Педагогика. – 2008. – № 7. – С. 32–39.
14. Еровенко В.А. «Максима чистого разума» и культурологическая составляющая математического знания / В.А. Еровенко, С.В. Демьянко // Адукацыя і выхаванне. – 2009. – № 2. – С. 52–58.
15. Еровенко В.А. «Символ философской простоты», или Почему для натуральных чисел справедливы законы арифметики / В.А. Еровенко, Н.Б. Яблонская // Философия и социальные науки. – 2009. – № 3. – С. 60–67.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Понятие множества. Способы задания множества

Любая теория начинается с введения основных начальных понятий, т. е. минимального списка неопределяемых терминов, понятий, которые называются *неопределяемыми* потому, что любая попытка определить их через другие термины приводит появлению других понятий, которые также нуждаются в определении. Примерами неопределяемых понятий является *точка* – то, что не имеет частей в интерпретации древнегреческих философов, или, *линия* – длина без ширины и т. д. Центральным местом в иерархии математических сущностей является математический объект и понятие *множество*. Понятие множества является в математике первичным, несводимым к более простым понятиям.

Основоположник теории множеств немецкий математик и философ **Георг Кантор** под **множеством** понимал «*всякое многое, мыслимое, как единое*». Он впервые в математической науке изучил свойства абстрактных бесконечных множеств и осуществил их классификацию, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств. В математике *под **множеством** понимается совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого*. Канторовское определение множества потребовало введения следующих трех символов.

Первый символ должен представлять множество как «единое», т. е. представлять само множество. Для ***обозначения множеств*** используются прописные буквы латинского алфавита *A*, *B*, *C*, …, *X*, *Y*, *Z*, или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «многое», т. е. рассматриваться как «элемент множества». ***Элементами множества*** называются объекты, составляющие множество.

Например, если множество представляет собой совокупность студентов-философов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для ***обозначения элементов*** используются строчные буквы того же алфавита, например, $a, b, c, \ldots x, y, z$.

Третий символ должен ***соотносить элемент*** множеству. Тот факт, что «x *является элементом множества M*» записывается в виде $x \in M$.

Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «*x* принадлежит множеству *M*» или «*x содержится в множестве M*». Символ $\in$ называется ***символом принадлежности***. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – быть. Если «*x не является элементом множества M*», то пишут $x \notin M$ и читают, как «*x не принадлежит множеству M*», «*x не содержится в множестве M*».

Множество, не содержащее элементов называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$.

Замечание. *Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно*.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество. Сравнительно простые *конечные множества* – это множества, состоящие из конечного числа элементов.

Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы. *Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют их запятыми.*

Например, множество букв алфавита белорусского языка – {а, б, в, …, я}, множество студентов данной учебной группы определяется их списком в экзаменационной ведомости – {Семенова О.В., Иванов А.П., …, Петрова И.Н.}, множество всех стран на земном шаре – их списком в последнем издании географического атласа.

В общем случае множество задается с помощью указания *характеристических свойств* его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества. Так запись

$$\{x\text{: } x \text{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство P. Двоеточие в этой записи можно читать как «*такой, что*».

Например, множество $A = \{2,\ 4,\ 6,\ \dots\} = \{x$: x – четное натуральное число$\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или множество $B = \{x$: x – натуральное число, такое, что $x < 6\}$.

Замечание. *Множество состоящее из одного элемента* $\{x\}$ *не следует путать с самим этим элементом* x*, т. е.* $x \neq \{x\}$.

Задачи с решениями

1. *Задайте множество способом перечисления его элементов:*

а) *Множество A – «множество дней недели».*

Имеем, множество A = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

б) *Множество B – «множество основных арифметических действий».*

Имеем, множество B = {сложение, вычитание, умножение, деление}.

2. *Задайте множества из предыдущей задачи* **1**, *указывая только характеристические свойства его элементов.*

Указанные множества A и B можно задать следующим образом:

а) $A = \{a$: a – день недели$\}$.

б) $B = \{в$: $в$ – арифметические действия$\}$.

3. *Перечислите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства*:

а) *Множество корней квадратного уравнения* $X = \{\, x\colon x^2 - 2\cdot x - 15 = 0\}$.

Имеем, множество $X = \{-3, 5\}$.

б) *Множество* $X = \{\, x$ *– натуральное число*: $-4 < x \le 3\}\}$.

Имеем, множество $X = \{1, 2, 3\}$.

Задачи

4. *Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения* $x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$» *способом перечисления его элементов*.

5. *Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения* $x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$» *с помощью указания характеристических свойств его элементов.*

6. *Составьте список элементов множества, заданного с помощью характеристического свойства элементов:*

а) *Множество* $X = \{x$ *– натуральное число:* $x < 7\}$.

б) *Множество* $X = \{x$ *– натуральное число:* $|x| < 4\}$.

1.2. Операции над множествами

Задать операцию над множествами – это означает указать способ как по двум заданным множествам A и B строить третье.

Определение подмножества. *Множество A называется* ***подмножеством*** *множества B, обозначается* $A \subset B$ *(или* $B \supset A$*), если каждый элемент множества A является элементом множества B.*

$$A \subset B \iff (\forall\, x)\,(\, x \in A \Rightarrow x \in B\,).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – *квантор всеобщности* («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ — *импликация* (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает: «*если X, то Y*», «в случае X выполняется Y»), наконец, логическая связка $\Leftrightarrow$ – *эквивалентность* («*если и только если*», ритуальное выражение «*тогда и только тогда, когда*»), называемая иногда «двойной импликацией».

Например, множество M – «множество трудов философа Иммануила Канта» есть подмножество множества N – «множество трудов немецких философов», т. е. $M \subset N$. Множество A – «множество студентов–заочников философского отделения БГУ» является подмножеством множества B – «множество студентов философского отделения БГУ», т. е. $A \subset B$, и если рассмотреть множество C – «множество студентов БГУ», тогда $A \subset B \subset C$.

Замечание. *В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество* $\varnothing$, *т. е.*

$$A \subset A \quad \text{и} \quad \varnothing \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\varnothing$ не было подмножеством множества A, то оно содержало бы элемент принадлежащий $\varnothing$, но не принадлежащий A, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно. Эти два подмножество, т. е. $\varnothing$ и A, называются *несобственными подмножествами* множества A. Остальные подмножества, если таковые есть, называются *собственными подмножествами* множества A. **Например**, множество гласных букв является собственным подмножеством букв русского алфавита, множество трудов немецкого философа Канта является собственным подмножеством трудов немецких философов.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 2\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$.

У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n подмножеств, включая пустое и его самого.

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого ***универсальным множеством***. Будем обозначать его через ***U***. Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – это, так называемые, ***диаграммы Эйлера–Венна***. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает *универсальное множество* ***U.***

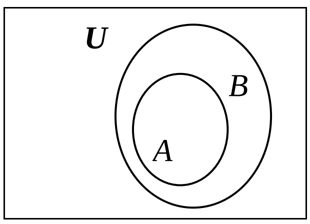


Рис. 1

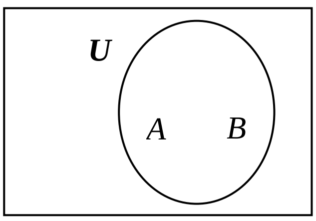


Рис. 2

В диаграммах Эйлера–Венна не имеет значения относительный размер кругов, а только их взаимное расположение. На рис. 1 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что множество A включено в множество B, т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним. На рис. 2 также изображено включение $A \subset B$, но при этом множества A и B совпадают.

Определение равенства множеств. *Множества A и B* ***равны****, обозначается A = B, если все элементы множества A принадлежат также* *множеству В, и наоборот, все элементы множества В принадлежат также множеству А:*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \quad и \quad B \subset A).$$

Согласно этому определению, $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого множества, поэтому можно говорить, что *множества А и В состоят из одних и тех же элементов* (см. рис. 2).

Примером равенства множеств A и B является следующие множества: Пусть множество $X = \{2, 3\}$, а множество $Y = \{y\colon y^2 - 5\cdot y + 6 = 0\}$, тогда $X = Y$.

Определение пересечения множеств. Пересечением *двух множеств А и В, обозначается $A \cap B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств А и В:*

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \boldsymbol{и}\ x \in B\}.$$

Символ «равенства с *def*» в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* – это сокращение от латинского слова *definite* – определение.

Например, если A – «множество студентов 1-го курса философского отделения», а B – «множество девушек, которые учатся на философском отделении», то $A \cap B$ – «множество девушек–студенток 1-го курса философского отделения».

Если, например A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел».

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, $A \cap B = \varnothing$, и в таком случае говорят, что множества A и B ***не пересекаются***. На рис. 3 и рис. 4 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях когда, соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

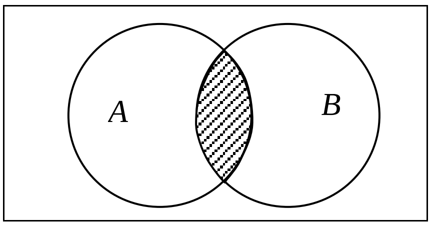


Рис. 3

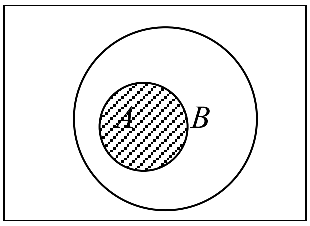


Рис. 4

Операция *пересечения множеств* обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции *умножения* чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис. 4), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A, и только они.

Замечание. *Отметим, **свойства пересечения**, справедливые для любых множеств A, B и C:*

$$A \cap B \subset A \quad и \quad A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad и \quad A \cap \boldsymbol{U} = A.$$

Также верно равенство $A \cap A = A$.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОСОФИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем пересечение этих множеств $A \cap B$.

Множество A состоит из 6 различных букв:

$$A = \{Ф, И, Л, О, С, Я\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Пересечением этих множеств является следующий набор из 5 букв:

$$A \cap B = \{Ф, И, Л, О, Я\},$$

который содержится как во множестве A, так и во множестве B.

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «***и***» вместе с символами принадлежности элемента «$\in$».

Определение объединения множеств. Объединением *двух множеств A и B, обозначается $A \cup B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.*

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \ \textbf{\textit{или}}\ \ x \in B\}.$$

Например, если A – «множество всех девушек, которые учатся на философском отделение БГУ», а B – «множество всех юношей, которые учатся на том же отделении», то $A \cup B$ – «множество всех студентов философского отделения БГУ».

Если A – «множество всех нечетных натуральных чисел», а B – «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел».

На рис. 5 приведена диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случае, когда $A \cap B \neq \varnothing$. На рис. 6 и рис. 7 приведена диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \cup B$ на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

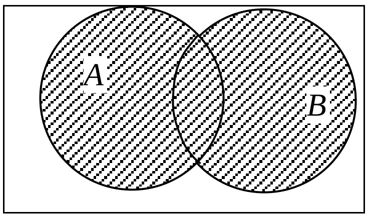


Рис. 5

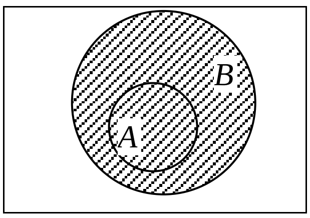


Рис. 6

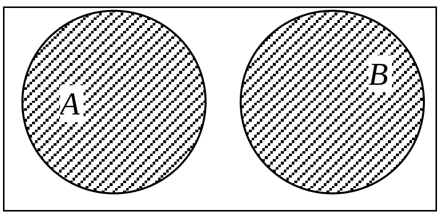


Рис. 7

Операция *объединение множеств* обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции *сложения* чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$ (см. рис. 6), так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо.

Замечание. *Отметим **свойства объединения**, справедливые для любых множеств A, B и C:*

$$A \subset A \cup B \quad и \quad B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cup \varnothing = A \quad и \quad A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}.$$

Также верно равенство $A \cup A = A$.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОСОФИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем объединение этих множеств $A \cup B$.

Множество A состоит из 6 различных букв:

$$A = \{Ф, И, Л, О, С, Я\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Объединением этих множеств является следующий набор из 7 букв:

$$A \cup B = \{Ф, И, Л, О, С, Я, Г\}.$$

Поскольку 5 букв Ф, О, Л, И, Я принадлежащих пересечению множеств A и B вошли в объединение этих множеств только один раз, то мы получили только 7 букв, а не 6 + 6 = 12 букв, так как (6 + 6) – 5 = 7.

***Определение разности множеств. Разностью** двух множеств A и B, обозначается $A \setminus B$ (или $A - B$), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:*

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \textbf{\textit{и}}\ x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что множество B является подмножеством множества A. **Например**, если A и B – «множества студентов философского отделения, изучающих английский и немецкий языки, соответственно», то $A \setminus B$ – «множество студентов философского отделения, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык».

Если, например, множество $A = \{x\colon |x| \le 5\}$ и множество $B = \{x\colon x < 2\}$, то тогда разность $A \setminus B = \{x\colon 2 \le x \le 5\}$.

Заметим, что если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то тогда их разность $A \setminus B = \varnothing$ (см. рис. 6). На рис. 8–10 приведены диаграммы Эйлера–

Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $B \subset A$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \setminus B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

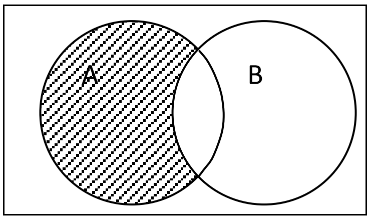


Рис. 8

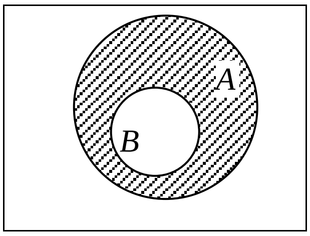


Рис. 9

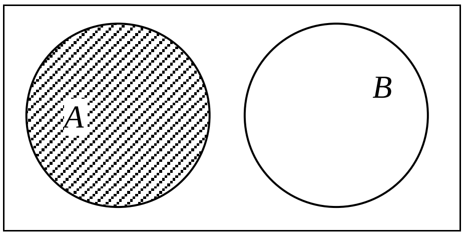


Рис. 10

Операция *разность множеств* обладает рядом свойств напоминающих свойства операции вычитания или *разности* чисел. Но следует обратить внимание на то, что *разность множеств не является операцией, обратной объединению множеств*.

Замечание. *Отметим* ***свойство разности****, справедливое для любых множеств A, B и C:*

$$A \setminus B \subset A.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения:

$$(A \setminus C) \subset (B \setminus C) \quad и \quad (C \setminus B) \subset (C \setminus A).$$

В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A \quad и \quad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОСОФИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем разность этих множеств $A \setminus B$.

Множество A состоит из 6 различных букв:

$$A = \{Ф, И, Л, О, С, Я\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Разностью этих множеств вида A \ B является набор из одной буквы С, $A \setminus B = \{С\}$, которая принадлежат множеству A, но не содержится в другом множестве B.

Замечание. *Операция разности множеств «не симметрична» относительно множеств A и B, в том смысле, что*

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

Более того, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Например, в предыдущем примере разность $A \setminus B = \{С\}$, а другая разность $B \setminus A = \{Г\}$, т. е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Если в операциях объединения и пересечения оба множества участвуют симметрично, то операция разности, как говорят математики, не коммутативна.

Ничего удивительного здесь нет, так как арифметическая разность чисел тоже не коммутативна.

Пример. Пусть A – «множество студентов–философов, слушавших лекции по "высшей математике"», *а* B – «множество студентов, изучавших "философию математики"». Найдем разность множеств $A \setminus B$ и разность множеств $B \setminus A$.

Имеем $A \setminus B$ – «множество студентов–философов, слушавших лекции по "высшей математике", но не изучавших "философию математики"», а $B \setminus A$ – «множество студентов, изучавших "философию математики", кроме студентов-философов, слушавших лекции по "высшей математике"».

Замечание. *«Вычитание» из множества A множества B сводится к «удалению» из множества A общей части A и B, т. е. множества* $A \cap B$*:*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Определение дополнения множеств. *Если* $\boldsymbol{U}$ *– универсальное множество, содержащее множество A, то разность* $\boldsymbol{U} \setminus A$ *называется* ***дополнением*** *множества A и обозначается* $\overline{A}$*:*

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x\text{:}\ x \in \boldsymbol{U} \ \boldsymbol{\textit{и}} \ x \notin A\} = \boldsymbol{U} \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\overline{A}$ множества A – это множество элементов фиксированного универсального множества $\boldsymbol{U}$, не входящих в множество A. **Например**, если $\boldsymbol{U}$ – множество всех действительных чисел, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

На рис. 11 универсальное множество $\boldsymbol{U}$ представлено прямоугольником на плоскости, а множество A – круг, лежащий внутри этого прямоугольника. На рис. 12 дополнению множества A, т. е. множеству $\overline{A}$ соответствует заштрихованная часть этого прямоугольника.

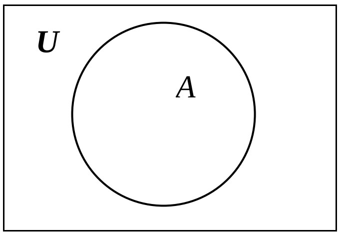


Рис. 11

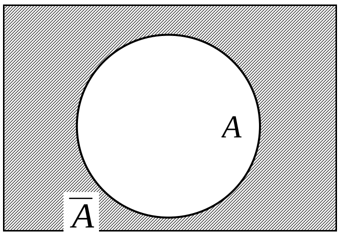


Рис. 12

Замечание. *Отметим следующие* ***свойства дополнения****, справедливые для любого множества A и содержащего его универсального множества* $\boldsymbol{U}$*:*

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U} \quad \textit{и} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Кроме того, для дополнения от дополнения множества, т. е. $\overline{\overline{A}}$*, имеем* $\overline{\overline{A}} = A$*, дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством, т. е.* $\overline{\varnothing} = \boldsymbol{U}$*, а дополнение универсального множества – пустое множество, т. е.* $\overline{\boldsymbol{U}} = \varnothing$*.*

Замечание. *Выделим также* ***свойство дополнения для включения множеств****, т. е. если* $A \subset B$*, то* $\overline{B} \subset \overline{A}$ *или* $\mathbf{U} \setminus B \subset \mathbf{U} \setminus A$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОСОФИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем дополнение множества A, т. е. множество $\overline{A}$:

Множество A состоит из 6 различных букв:

$$A = \{Ф, И, Л, О, С, Я\},$$

Поскольку в русском алфавите 33 буквы, то дополнением $\overline{A}$ является следующее множество, состоящее из 27 букв, среди которых нет букв из которых состоит множество A

$$\overline{A} = \{А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, \ldots Ц, Ш, Щ, Ъ, Ь, Ы, Э, Ю\}.$$

Замечание. *Разность множеств A и B можно выразить через пересечение множеств A и* $\overline{B}$*, а именно,*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

т. е. разность множеств $A \setminus B$ *есть пересечение множества A и дополнения множества B.*

В заключение рассмотрим на следующем примере все три операции над множествами: пересечение, объединение, разность.

Пример. Пусть A – «множество направлений исследований немецких философов», а B – «множество направлений исследований русских философов». Опишем множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$.

Получим: $A \cap B$ – «множество общих направлений исследований немецких и русских философов», $A \cup B$ – «множество направлений исследований немецких или русских философов}, $A \setminus B$ – «множество направлений исследований немецких философов, которыми не занимались русские философы», $B \setminus A$ – «множество направлений исследований русских философов, которыми не занимались немецкие философы», $\overline{A}$ – «множество направлений философских исследований, которыми не занимались немецкие философы».

Обозначим через $n(S)$ – *число элементов конечного множества S*. Посчитаем число элементов $n(A \cup B)$ объединения множеств A и B, в случае когда их пересечение не пусто, т. е. если $A \cap B \neq \varnothing$.

Утверждение. *Для произвольных конечных множеств A и B число элементов объединения этих множеств* $n(A \cup B)$ *равно:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Эта формула следует из того факта, что когда число элементов множества A суммируется с числом элементов множества B, то элементы, принадлежащие множеству $A \cap B$, учитываются дважды. Чтобы повторяющиеся элементы не учитывались дважды их необходимо «удалить».

Пример. В группе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?

Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда, в силу предыдущего утверждения, количество студентов, изучающих английский или немецкий языки, равно

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 10 - 5 = 30.$$

Замечание. *Обратим внимание на* ***свойство дополнения от объединения множеств****, т. е. справедливость равенства вида*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B),$$

а также на ***свойство дополнения от пересечения множеств****, т. е. справедливость равенства вида*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B).$$

Пример. В группе из 40 студентов 25 человек изучают английский язык, 10 – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество $\boldsymbol{U}$ – это группа из 40 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык равно пересечению дополнений $\overline{A} \cap \overline{B}$ или $(\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. В силу свойства дополнения для объединения множеств имеем

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B) = \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B).$$

Напомним, что, в силу решения предыдущего примера, число студентов группы, изучающих английский или немецкий язык, равно $n(A \cup B) = 30$. Поэтому, так как

$$n((\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)) = n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)) = 40 - 30 = 10$$

$$\text{или} \quad n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 40 - 30 = 10,$$

то всего 10 студентов группы не изучают эти иностранные языки.

Задачи с решениями

1. *Выписать все подмножества данного множества:*

а) *Множество* $A = \{\{0\}, 2\}$.

У множества A четыре подмножества: $\varnothing$, $\{\{0\}\}$, $\{2\}$, $\{\{0\}, 2\}$.

б) *Множество* $B = \{2, 4, 5\}$.

У множества B восемь подмножеств: $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$.

2. *Совпадают ли следующие множества*?

а) *Множество* $A = \{\{1, 2\}, 3\}$ *и множество* $B = \{1, 2, 3\}$.

Нет, не совпадают, так как множество A состоит из двух элементов $\{1, 2\}$ и 3, а множество B – из трех элементов: 1, 2, 3.

б) *Множество $A = \{$Рассел Б., Уайтхед А. Н.$\}$ и множество B –* «*авторы "Principia Mathematica"* ».

Множества равны, т. е. $A = B$, так как содержат одних и тех же авторов фундаментального труда о принципах математики.

3. *Верны, ли следующие включения и вложения:*

а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

Нет, не верно, так как в множестве $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ нет элемента $\{1, 2\}$. Это множество содержит 4 элемента: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, 1 и 2.

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 5, 7\}$.

Да, верно, так как множество $\{2, 5\}$ – это подмножество множества $\{1, 2, 5, 7\}$.

4. *Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого:*

$A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{\{1\}, 2, 3\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{\{1, 2\}, 3\}$.

Имеем $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset E$; $B \subset C$, $B \subset E$; $C \subset E$; $E \subset C$.

5. *Описать следующие множества*: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, *где:*

а) *A –* «*множество студентов–философов "отличников" группы*», *B –* «*множество студентов–философов "хорошистов" группы*».

Имеем, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ – «множество студентов–философов "отличников" или "хорошистов" группы», $A \setminus B$ – «множество студентов–философов "отличников" группы», $B \setminus A$ – «множество студентов–философов "хорошистов" группы».

б) *A –* «*множество студентов философского отделения, читавших Лейбница*», *B –* «*множество девушек–студенток философского отделения*».

Имеем, $A \cap B$ – «множество девушек–студенток философского отделения, читавших Лейбница», $A \cup B$ – «множество студентов философского отделения, читавших Лейбница и девушек–студенток философского отделения, которые не читали Лейбница», $A \setminus B$ – «множество юношей–студентов философского отделения, читавших Лейбница», $B \setminus A$ – «множество девушек–студенток философского отделения, которые не читали Лейбница».

в) *$A = \{$Кант, Гегель, Декарт, Флоренский, Фейербах, Лейбниц, Беркли$\}$, B – «множество немецких философов прошлых веков».*

Имеем, $A \cap B = \{$Кант, Гегель, Фейербах, Лейбниц$\}$, $A \cup B$ – «множество немецких философов прошлых веков, а также Декарт, Флоренский и Беркли}, $A \setminus B = \{$Декарт, Флоренский, Беркли$\}$, $B \setminus A$ – «множество немецких философов прошлых веков, исключая Канта, Гегеля, Фейербаха, Лейбница}.

6. *Дано множество $A = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами заданного множества A, а какие объекты его подмножествами:* 2, $\{2\}$, $\{1, 2\}$,$\{1, 3\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1, \{2\}\}$, $\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Имеем, что 2 – это элемент; {2} – подмножество; {1, 2} – это и элемент и подмножество; {1, 3} – подмножество; {1, {1}} – это подмножество; {{1}} – это тоже подмножество; {1, {2}} – это ни элемент, ни подмножество; {1, 2, {1, 2}} – подмножество.

7. *Описать множества вида* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, *где:*

а) *Множество* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *а множество* $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Имеем, пересечение $A \cap B = \{2, 4\}$, объединение $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$, разность $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ и еще одна разность $B \setminus A = \{6, 8, 10\}$.

б) *Множество* $A = \{a\colon a \in (-7; 1]\}$, *множество* $B = \{a\colon a \in [-3; 4]\}$.

Имеем, пересечение $A \cap B = \{a\colon a \in [-3; 1]\}$, объединение $A \cup B = \{a\colon a \in (-7; 4]\}$, разность $A \setminus B = \{a\colon a \in (-7; -3)\}$, другая разность $B \setminus A = \{a\colon a \in (1; 4]\}$.

8. *Даны следующие числовые множества:* $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$ *и* $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. *Найти множества, которые будут получены в результате выполнения следующих двух операций:*

а) *Множество* $(A \cup B) \setminus C$.

Имеем $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\} \setminus \{1, 2, 3, 5, 9, 12\} = \{6, 7, 11\}$.

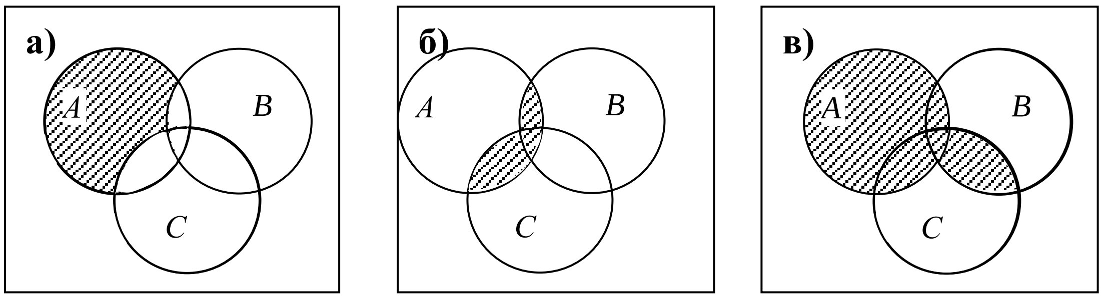
б) *Множество* $(A \cap C) \setminus B$.

Имеем $(A \cap C) \setminus B = \{1, 3, 5, 9\} \setminus \{2, 5, 6, 11, 12\} = \{1, 3, 9\}$.

в) *Множество* $(A \cap B) \cap C$.

Имеем $(A \cap B) \cap C = \{5, 11\} \cap \{1, 2, 3, 5, 9, 12\} = \{5\}$.

9. *Заштриховать на кругах Эйлера-Венна ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству*: **а)** $(A \setminus B) \setminus C$, **б)** $A \cap (B \cup C)$, **в)** $A \cup (B \cap C)$.



Задачи

10. *Выписать все подмножества данного множества*:

а) $A = \{1, 3\}$. **б)** $B = \{\{1, 2\}, 3\}$. **в)** $C = \{\{1, 2, 3\}\}$.

11. *Проверить, совпадают ли множества A и B:*

а) $A = \{\{1, 3\}, 2\}$ *и* $B = \{1, 2, 3\}$.

б) $A = \{2, 3\}$ *и* $B = \{x\colon x^2 - 5\cdot x + 6 = 0\}$.

12. *Выяснить справедливы ли включения*:

а) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 4, \{5\}, 7\}$.
в) $\{-1, 1\} \subset \{x: x^2 = 1\}$.

13. *Для каждых двух из следующих четырех множеств проверить какие из них являются подмножествами другого множества:*

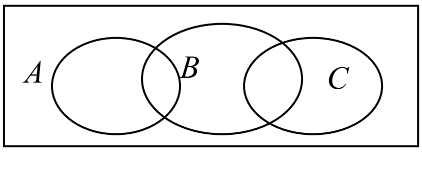
$$A = \{0\},\quad B = \{-1, 0\},\quad C = \{\{0\}, 0, 1\},\quad D = \{\{0, 1\}, 2\},$$
$$E = \{-1, 0, 1, \{0\}\},\quad F = \{-1, 0, \{0, 1\}, 2\}.$$

14. *Описать следующие множества*: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, *где:*
а) *A – «множество студентов–философов отличников группы» и B – «множество студентов–философов».*
б) *A – «множество успевающих студентов философского отделения» и B – «множество студентов–юношей философского отделения».*
в) *A – «множество отличников–заочников философского отделения» и B – «множество девушек–заочниц философского отделения».*
г) *A – «множество студентов философского отделения, изучавших философию математики» и B – «множество студентов–отличников университета».*

15. *Даны следующие числовые множества:* $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. *Найти числовые множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций*:
а) $(C \setminus B) \cap A$.
б) $B \setminus (A \cap C)$.
в) $(C \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

16. *Заштриховать ту часть диаграммы Эйлера–Венна при расположении множеств как в задаче* **9**, *которая соответствует следующему множеству:*
а) $(A \cup B) \setminus C$.
б) $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.
в) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$.
г) $B \cap \overline{A}$.
д) $A \setminus (B \cap \overline{C})$.
е) $A \setminus \overline{(B \cup C)}$.

18. *Выполнить задания задачи* **16**, *в частном случае, когда множества A, B и C расположены следующим образом:*



1.3. Основные свойства операций над множествами

Рассмотренные выше операции объединения, пересечения, разности множеств составляют основные операции теории множеств. Рассмотрим теперь основные свойства операции объединения и пересечения множеств, отчасти аналогичные свойствам операций сложения и умножения чисел.

1. Законы коммутативности.

Для любых двух множеств A и B выполняются ***свойства коммутативности*** *операций объединения и пересечения:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях. Заметим, что операция разности некоммутативна, т. е., вообще говоря, $A \setminus B \neq B \setminus A$ (соответствующие замечания и пример были приведены в пункте 1.2).

2. Законы ассоциативности.

Для любых трех множеств A, B и C выполняются ***свойства ассоциативности*** *для операций объединения и пересечения:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Замечание. *Операция разности неассоциативна, т. е., вообще говоря,*

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$$

Утверждение о неассоциативности операции разности множеств в общем случае можно проверить на конкретных примерах. На рис. 14, 15 приведены диаграммы Эйлера–Венна для трех множеств A, B, и C, на которых множествам $A \setminus (B \setminus C)$и $(A \setminus B) \setminus C$ соответствуют заштрихованная часть диаграмм.

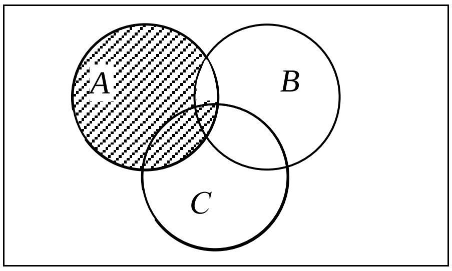


Рис. 14

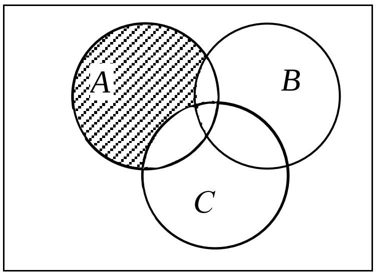


Рис. 15

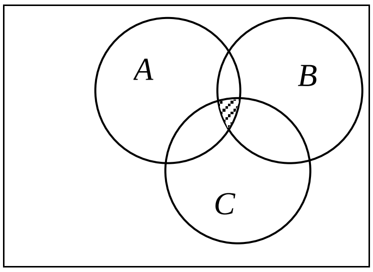


Рис. 16

Рассмотрим как в случае пересечения конечных множеств A, B и C посчитать число элементов множества $A \cup B \cup C$. Если просуммировать количество элементов в каждом множестве A, B и C, то некоторые подмножества при подсчете будут учтены дважды. Если вычесть число элементов множества $A \cap B$, множества $A \cap C$ и множества $B \cap C$, т. е. $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ соответственно, из числа элементов $n(A \cup B \cup C)$, то как видно из диаграммы Эйлера-Венна (рис. 16) элементы множества $A \cap B \cap C$ совсем не будут учтены. Поэтому если к указанной разности добавить $n(A \cap B \cap C)$, то каждый элемент множества $A \cup B \cup C$ будет учтен ровно один раз. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C).$$

3. Законы дистрибутивности.

При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств A, B, и C выполняются ***свойства дистрибутивности*** *одной операции относительно другой:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Напомним, что в числовых примерах есть аналог дистрибутивности умножения относительно сложения, но нет дистрибутивности сложения относительно умножения.

Докажем *дистрибутивность объединения относительно пересечения для множеств, т. е. равенство*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

По определению равенства множеств надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{и} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Напомним, что по *определению подмножества* необходимо показать, что если элемент x принадлежит левой части включения, то он принадлежит правой части включения.

Начнем с первого включения. Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. По определению объединения множеств отсюда следует, что $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то тогда по свойству объединения $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, по определению пересечения множеств, имеем, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то, по определению пересечения множеств, $x \in B$ и $x \in C$, отсюда, по *свойству объединения*, получим $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, по определению пересечения множеств, имеем, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Первое включение доказано.

Рассмотрим теперь второе включение. Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. По определению пересечения множеств отсюда следует, что $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Возможны следующие варианты для рассматриваемых x, а именно, $x \in A$ и $x \notin A$. Если $x \in A$, то по *свойству объединения*, имеем $x \in A \cup (B \cap C)$. Если $x \notin A$ и одновременно $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, то из этих трех соотношений и из определения объединения множеств получим, что $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, по определению пересечения множеств, $x \in B \cap C$ и, по *свойству объединения*, получим, что $x \in A \cup (B \cap C)$. Второе включение доказано.

Таким образом, доказана дистрибутивность объединения относительно пересечения для множеств.

Пример. Множество всех студентов философского отделения является объединением следующих трех множеств: A – «множество всех успевающих студентов», B – «множество всех девушек–студенток», C – «множество всех неуспевающих юношей–студентов». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ясно, что каждый студент философского отделения принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества A и B имеют общие элементы – успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

Поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ – «множество всех успевающих студентов и всех девушек–студенток», $A \cup C$ – «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей–студентов», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ – «множество всех успевающих студентов», т. е. это множество A. В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поскольку $B \cup C$ – «множество всех девушек–студенток и всех неуспевающих юношей–студентов», то $A \cap (B \cup C)$ – «множество всех успевающих девушек–студенток», с другой стороны, так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ – «множество всех успевающих девушек–студенток». В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Задачи с решениями

1. *Доказать равенство множеств*

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cup B$ и $A \cup (B \setminus A)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A) \quad \text{и} \quad A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$

а) Докажем первое включение $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$.

Пусть $x \in A \cup B$, тогда, по определению объединения множеств, $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in B$, то тогда возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Первый случай, т. е. $x \in A$, рассмотрен выше. Второй случай, т. е. $x \notin A$, по определению разности множеств означает, что $x \in B \setminus A$. Тогда по свойству объединения, получим $x \in (B \setminus A) \cup A$, а по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$.

Пусть $x \in A \cup (B \setminus A)$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup B$.

Если $x \in B \setminus A$, то по свойству разности $x \in B$ и по свойству объединения получим $x \in B \cup A$. Тогда по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

2. *Доказать равенство множеств*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \setminus B$ и $A \setminus (A \cap B)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B) \quad \text{и} \quad A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B.$$

а) Докажем первое включение $A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$.

Пусть $x \in A \setminus B$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin B$.

Заметим, что по свойству пересечения множеств так как $A \cap B \subset B$, то по свойству дополнения для включения множеств, из включения $A \cap B \subset B$ следует включение $\overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$, т. е. если $x \notin B$, то $x \notin A \cap B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin B$ следует, что $x \in A$ и, в силу замеченного, $x \notin A \cap B$. Следовательно, $x \in A \setminus (A \cap B)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B$.

Пусть $x \in A \setminus (A \cap B)$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin A \cap B$.

Заметим, что по свойству дополнения от пересечения множеств $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$, т. е. если $x \notin A \cap B$, то $x \notin A$ или $x \notin B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin A \cap B$ следует, что $x \in A$ и, в силу сделанного замечания $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда отсюда вытекает, во-первых, $x \in A$ и $x \notin A$, что влечет за собой $x \in A$ и $x \in \overline{A}$, а так как по свойству дополнения $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то $x \in \varnothing$, а, во-вторых, $x \in A$ и $x \notin B$, что по определению разности множеств можно записать как $x \in A \setminus B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

3. *Доказать равенство множеств*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cap B$ и $A \setminus (A \setminus B)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B) \quad \text{и} \quad A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B.$$

а) Докажем первое включение $A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B)$.

Пусть $x \in A \cap B$, тогда по определению пересечения множеств $x \in A$ и $x \in B$.

Заметим, что по свойству объединения множеств $B \subset \overline{A} \cup B$, т. е. если $x \in B$, то и $x \in \overline{A} \cup B$. Далее, так как множество B равно дополнению от дополнения множества B, т. е. $B = \overline{\overline{B}}$, то $\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$, а последнее, по свойству дополнения от пересечения множеств, равно $\overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}$. Поэтому, если $x \in \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}$, то по определению дополнения отсюда следует, что $x \notin A \cap \overline{B}$. Теперь можно воспользоваться выражением разности множеств A и B через пересечение множеств A и $\overline{B}$, а именно, равенством $A \cap \overline{B} = A \setminus B$. Поэтому из $x \notin A \cap \overline{B}$ следует, что $x \notin A \setminus B$.

Следовательно, из начального предположения $x \in A$ и $x \in B$ мы окончательно получим, что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$, а по определению разности множеств A и $A \setminus B$ это означает, что $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$.

Пусть $x \in A \setminus (A \setminus B)$, тогда по определению разности для множеств A и $A \setminus B$ имеем, что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$.

Заметим, что разность множеств A и B можно представить в виде пересечения множеств A и $\overline{B}$, а именно, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Поэтому из $x \notin A \setminus B$ следует, что $x \notin A \cap \overline{B}$, а по определению дополнения это означает, что $x \in \overline{A \cap \overline{B}}$. По свойству дополнения от пересечения множеств $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$, а так как $\overline{\overline{B}} = B$, то $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$. Таким образом, если $x \notin A \setminus B$, то $x \in \overline{A \cap \overline{B}}$ и, в силу последнего равенства, $x \in \overline{A}$ или $x \in B$, другими словами, по определению дополнения, $x \notin A$ или $x \in B$.

Следовательно, из начального предположения что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$ мы окончательно получили, что $x \in A$ и одновременно $x \notin A$ или $x \in B$. Отсюда вытекает, во-первых, $x \in A$ и $x \notin A$, что влечет за собой $x \in \varnothing$, а, во-вторых, $x \in A$ и $x \in B$, что по определению пересечения означает $x \in A \cap B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Задачи

4. *Проверить справедливость равенства*

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

5. *Проверить справедливость включения*

$$A \cap B \subset (A \cup B).$$

6. *Доказать равенство множеств*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

7. *Доказать равенство множеств*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

8. *Доказать равенство множеств*

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Основные принципы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. О простых и типовых, но в тоже время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с *основных принципов комбинаторики – принципа сложения и принципа умножения*, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по «Философии» и 5 различных книг по «Высшей математике». Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по «Философии» или книгу по «Высшей математике»? Сколькими способами можно выбрать две книги, по «Высшей математике» и «Философии»?

Ответ на первый вопрос очевиден. Книгу по «Философии» можно выбрать 8 способами, по «Высшей математике» – 5 способами. Следовательно, книгу по «Философии» или по «Высшей математике» можно выбрать 8 + 5 = 13 способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по «Высшей математике» и «Философии», то к каждой из 8 различных книг по «Философии» можно подобрать книгу по «Высшей математике» 5 способами, а именно, к первой книге по «Философии» подбираем 5 различных книг по «Высшей математике», ко второй книге по «Философии» – опять 5 различных книг по «Высшей математике» и т.д. Таким образом, набор, состоящий из книги по «Высшей математике» и «Философии» можно выбрать $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 8 \cdot 5 = 40$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что такие понятия теории множеств, как *подмножество, объединение множеств, пересечение множеств,* рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь два основных принципа комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. *Если множество A содержит n разных элементов, а множество B – m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n + m$ элементов.*

Замечание. *Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B, отличный от A, – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект A или B можно выбрать $n+m$ способами.*

Пример. Рассмотрим сколькими способами студенту факультета философии и социальных наук БГУ можно выбрать одну книгу, когда на полке находятся 14 книг по философии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по «математике для гуманитариев».

Заметим, что книгу по философии можно выбрать 14 способами, книгу по информационным технологиям – 10 способами, а книгу по «математике для гуманитариев» – 6 способами. Согласно *комбинаторному принципу сложения* и в силу предыдущего замечания, студент филфака может выбрать одну книгу на полке $14 + 10 + 6 = 30$ способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий *комбинаторный принцип умножения*.

Пример. Из города Бреста в Минск ведет n путей, а из города Минска в Москву ведет m путей. Скольким числом различных путей можно совершить путешествие из Бреста в Москву через город Минск?

Можно выбрать один из n возможных путей из Бреста в Минск, а дальше можно продолжить путешествие еще m способами, поэтому общее число различных путей из города Бреста в Москву равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. *Если множество A содержит n различных элементов, т. е. $A = \{a_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, а множество B – m разных элементов, т. е. $B = \{b_j : j = 1, 2, \ldots , m\}$, то тогда множество C, составленное из всех возможных пар, т. е. $C = \{(a_i, b_j): i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m\}$, содержит $n \cdot m$ элементов.*

Замечание. *Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно, независимо от выбора*

А, выбрать m способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект А и В можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример. Рассмотрим сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную — пятью способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно *комбинаторному принципу умножения* и в силу сделанного замечания, гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами.

Рассмотрим пример еще одной задачи, при решении которой используются оба принципа комбинаторики.

Пример. Сколькими способами студенту философского отделения ФФСН можно выбрать две книги по разным наукам, когда на полке находятся 14 книг по философии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по «математике для гуманитариев»?

Если выбирать книгу по философии и книгу по информационным технологиям, то существует 14 вариантов выбора книги по философии и 10 вариантов выбора книги по информационным технологиям, поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для этого выбора существует $14 \cdot 10 = 140$ возможностей.

Если выбирать книгу по философии и книгу по «математике для гуманитариев», то имеется 14 вариантов выбора книги по философии и 6 – книги по «математике для гуманитариев», поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для указанного выбора имеется $14 \cdot 6 = 84$ возможностей.

Если выбирается книга по информационным технологиям и книга по «математике для гуманитариев», то существуют 10 способов выбора книги по информационным технологиям и 6 – книги по «математике для гуманитариев», поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для такого выбора существует $10 \cdot 6 = 60$ возможностей.

Наконец, поскольку указанных три выбора разных пар книг отличаются друг о друга, то, согласно *комбинаторному принципу сложения*, всего существует $140 + 84 + 60 = 284$ способов выбора двух книг.

Задачи с решениями

1. *Студент философского отделения может пересдать зачет по «Основам высшей математики» либо в июне и на это дается ему 3 попытки, либо в январе с помощью двух попыток. Сколько всего существует попыток, чтобы сдать зачет по «Основам высшей математики»?*

Так как время попыток сдать зачет различное, то можно воспользоваться правилом суммы. Тогда согласно *комбинаторному принципу сложения,* количество попыток сдать зачет по курсу «Основы высшей математики» равно $3 + 2 = 5$.

2. *В группе студентов заочного отделения ФФСН числится 38 человек. Сколько всего существует различных способов выбора старосты группы и его заместителя?*

Сначала выберем старосту группы, число способов равно 38, так как каждый теоретически студент может быть старостой. После этого останется 37 студентов, из которых может быть выбран заместитель старосты. То есть число способов выбора заместителя – 37. По *комбинаторному принципу умножения* количество способов выбора пары староста и заместитель равно $38 \cdot 37 = 1406$.

3. *Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?*

Коробку конфет или коробку печенья можно выбрать согласно *комбинаторному принципу сложения* $7 + 5 = 12$ способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно согласно *комбинаторному принципу умножения* $7 \cdot 5 = 35$ способами.

Задачи

4. *Пусть на курсе учится 3 группы студентов. В первой – 25 человек, во второй – 30 человек, в третьей – 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать одного студента*а?

5. *Сколькими способами можно выбрать две буквы, а именно гласную и согласную буквы из ключевого слова для студентов–философов, изучающих курс «Основы высшей математики»,* МЕТОДОЛОГИЯ?

6. *Пусть в университетской библиотеке имеются издания трудов знаменитых математиков и философов, в частности: Паскаля – 5 экземпляров книг, Декарта – 4 экземпляра и Лейбница – 3 экземпляра. Верно ли, что выбор по одной книге каждого из этих философствующих математиков можно сделать 60 способами?*

7. *В магазине одежды "Товары для молодежи" продается 5 разных рубашек и 4 разных галстука нужного размера. Сколько всего существует разных способов выбора в подарок рубашки и галстука, без учета их фасона и цвета, непривередливому другу?*

2.2. Комбинаторика: Выбор без повторений

Характерной чертой математического анализа комбинаторных задач является абстрагирование, т. е. отвлечение от конкретных черт в целях выявления глубинного содержания, общего для задач, внешне отличающихся друг от друга. Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т. д, тогда, **например**:

$$(a, b, c) \neq (b, a, c) \neq (c, b, a).$$

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках.

Например, из множества {А, Б} можно построить упорядоченное множество, которое записывается в *круглых скобках, указывающих на то, что задан порядок элементов*, двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду упорядоченное множество элементов, так что перестановки элементов не допускаются. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: поставить его спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА получим: ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств из трех элементов:

(А, Б, В), (А, В, Б), (Б, А, В), (Б, В, А), (В, Б, А), (В, Б, А).

Проиллюстрируем предыдущую задачу о способах упорядочивания трехэлементного множества на примере о способах расстановки трех книг на трех позициях в университетской библиотеке с помощью *графа*, называемого *деревом* за внешнее сходство с деревом.

Пример. Библиотекарь университетской библиотеки расставляет на полке друг за другом три разные книги из раздела "философия": книгу Лейбница, книгу Канта и книгу Паскаля. Рассмотрим, сколькими способами это можно сделать.

На 1-ую позицию или первой может стоять любая из трех книг, т. е. имеется 3 варианта их расстановки, на 2-ую позицию, т. е. следом за первой книгой, можно поставить любую из двух оставшихся книг, т. е. каждый из предыдущих вариантов приходится еще 2 варианта, на 3-ю позицию ставится последняя книга, т. е. это единственная оставшаяся книга. Следовательно, по *комбинаторному принципу умножения*, три различные книги можно расставить $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Изобразим эти варианты с помощью дерева (рис. 17), помещая в вершины графа первые буквы имен трех философов *Л, К* и *П*:

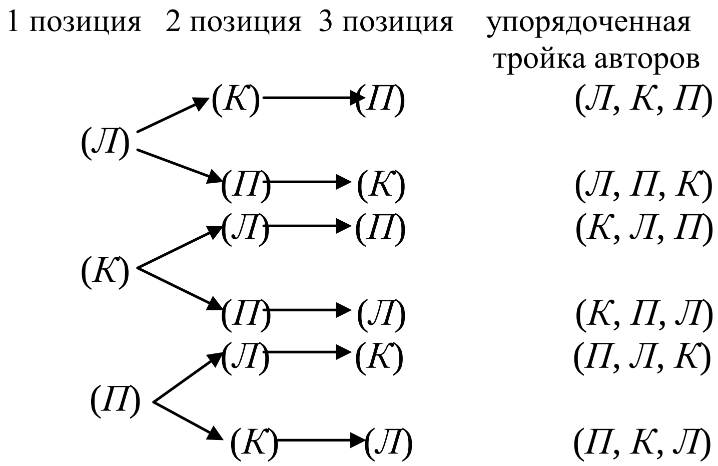


Рис. 17

Определение перестановки. *Установленный в конечном множестве порядок называют* ***перестановкой*** *его элементов.*

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математике используется ***n-факториал****, который обозначают* ***n!*** (читают «эн-факториал»), т. е.

$$\boldsymbol{n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов *обозначают* P_n (P – первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

Утверждение. *Число перестановок P_n можно вычислить по формуле*:

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Действительно, пусть $n = 2$, тогда число перестановок из двух элементов равно 2 – на первое место поставили любой из двух, а на второе – оставшийся элемент. $P_2 = 2$. Если $n = 3$, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2 и на третье место – последний элемент, вариант один. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Пример. Сколько существует вариантов для выступающих на собрании учебной группы, если для выступления на собрании записалось всего 4 человека?

Так как на собрании должны выступать всего четыре оратора, то число способов расположения их в списке выступающих на собрании равно числу перестановок из 4 элементов – P_4, т. е. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

При помощи формулы для факториала, которую можно записать в виде $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$, последовательно получаем:

$$1! = 1,\quad 2! = 2,\quad 3! = 6,\quad 4! = 24,\quad 5! = 120,\quad 6! = 720,$$

$$7! = 5040,\quad 8! = 40320,\quad 9! = 362880,\quad 10! = 3628800.$$

Кроме того, для удобства в дальнейших вычислениях принято считать, что $0! = 1$, так как полагая $n = 0$ в формуле $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$ формально получим $1! = 0! \cdot 1$, откуда следует формальное равенство $0! = 1$.

Иногда бывает нужно из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \leq n$) и расположить их в некотором порядке. Рассмотрим *сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m* ?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы надо расположить в определенном порядке. Таких способов всего 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения, всего получается $4 \cdot 3 = 12$ способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А),

(Б, В), (Б, Г), (В, А), (В, Б),

(В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

Пример. Рассмотрим сколькими способами можно разложить 2 пронумерованных шара в 4 пронумерованные корзины, так, чтобы в каждой корзине оказалось не больше одного шара.

Первый шар мы можем положить в любую из четырех имеющихся корзин, после чего второй шар может быть размещен в любой из оставшихся трех корзин. Поэтому, по комбинаторному принципу умножения, 2 шара можно разложить в 4 корзинах $4 \cdot 3 = 12$ способами. Представим эти варианты выбора с помощью дерева, каждая ветка которого оканчивается одним из вариантов размещения, поэтому такой граф называют еще *деревом вариантов*. Для большей наглядности обозначим корзины по порядку буквами А, Б, В, Г, а шары – числами 1 и 2.

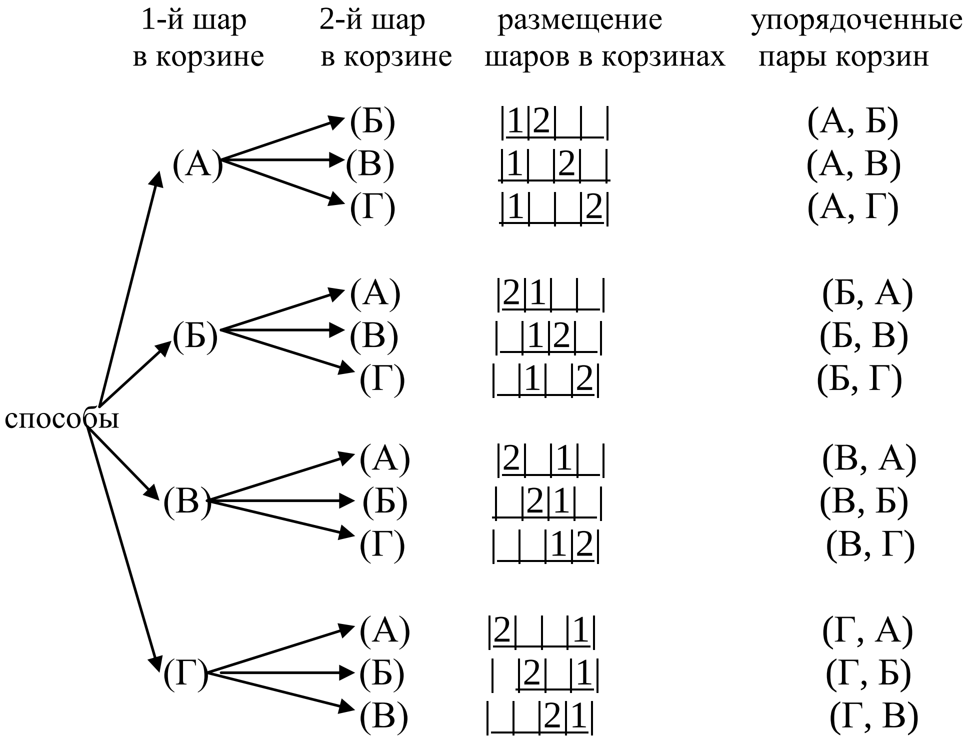


Рис. 18

Это рассуждение можно распространить на случай произвольных n и m следующим образом:

первый шар может быть положен в любую из n корзин,

второй шар может быть положен в любую из оставшихся $n – 1$ корзин,

…

m-й шар может быть положен в любую из оставшихся $n – (m – 1)$ корзин.

Таким образом, всего получается $n\cdot (n – 1) \cdot\ldots\cdot (n – (m – 1))$ способов.

Определение размещения. *Конечные упорядоченные множества называются* ***размещениями****.*

Напомним, что нас интересует задача: сколько упорядоченных множеств по m элементов в каждом можно получить из заданного множества, содержащего n элементов? Сейчас мы можем записать ее короче: сколько существует размещений из n по m ?

Число всевозможных размещений из n элементов по m *обозначают* A_n^m (A – первая буква французского слова *arrangement* – размещение). Читается: «число размещений из эн элементов по эм» или «A из эн по эм».

Утверждение. *Число размещений A_n^m, где $m \le n$, можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{A_n^m = n \cdot (n – 1) \cdot \ldots \cdot (n – m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Из формулы числа размещений следует:

$$A_n^1 = n,\quad A_n^2 = n \cdot (n – 1),\quad A_n^3 = n \cdot (n – 1) \cdot (n – 2),$$

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6, \quad A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \quad A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Если в формуле для A_n^m положить $m = 0$, то получим, что $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$, поэтому принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это, по-своему, верно, поскольку существует только одно пустое множество $\varnothing$ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним - единственным образом.

Замечание. *Перестановки – это частный случай размещения при* $m = n$, *т. е.* $A_n^n = P_n = n!$. *Кроме того, для* $m = n$–1 *в формуле для числа размещений имеем* $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$.

Последнее равенство справедливо, еще потому, что если из n различных объектов выбраны n–1 и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т. е. $A_n^n = A_n^{n-1}$.

Пример. Сколько существует в n-буквенном алфавите m-буквенных слов, состоящих из различных букв?

По формуле для размещений искомое число равно $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить следующее количество двухбуквенных «слов» $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33 \cdot 32 = 1056$, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту–философу заочного отделения необходимо срочно до отчисления пересдать 3 экзамена на протяжении 4 дней. Посчитать, сколько вариантов теоретически существует для дней сдачи этих экзаменов.

Искомое число способов равно числу 3-элементных упорядоченных подмножеств, т. е. дней сдачи экзаменов, из 4-элементного множества дней. По формуле числа размещений это число равно $A_4^3 = 24$.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: *скольким способами можно выбрать из* n *различных предметов* m *штук* ($m \le n$)?

Например, пусть из четырех корзин обозначенных буквами А, Б, В и Г нужно выбрать две. Сколькими способами это можно сделать?

Свяжем этот пример с примером, рассмотренным выше, а именно выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Тогда дерево вариантов, изображенное на рис. 18 дает первый шаг решения. Однако можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например, (А,Б) и (Б,А). Сейчас для нас не существенно, какой шар, первым или вторым оказался в корзине, или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае, т. е. перемен мест, двух выбранных корзин, т. е. перестановок, всего две, то две корзины из четырех можно выбрать 12 : 2 = 6 способами.

Определение сочетания. *Конечные (неупорядоченные) множества называют* ***сочетаниями***.

Отметим, что *перестановки* и *размещения – это упорядоченные множества,* а *сочетания – это неупорядоченные множества*. *Сочетания* – это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m *обозначают* C_n^m (C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание). Читается: «число сочетаний из эн элементов по эм» или «C из эн по эм».

Утверждение. *Число сочетаний* C_n^m*, где* $m \le n$*, можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}}$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т. е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = n,\quad C_n^2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2},\quad C_n^3 = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\quad C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\quad C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в формуле для C_n^m положить $m = 0$, то получим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = 1$, поэтому *принято считать*, что $C_n^0 = 1$. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни один элемент (или выбрать 0 элементов) из n-элементного множества. В частности, отметим, что $C_n^n = 1$.

Замечание. О*братим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить* m *на* $m – n$*, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами:*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = C_n^{n-m}.$$

Например, пусть в группе из n студентов–философов надо выбрать m человек для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносилен выбору $n–m$ студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n–m$ человек из n. Это означает, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ или непосредственно

$$\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot(n-n+m)!}.$$

В частности, $C_5^0 = C_5^5 = 1$, $C_5^1 = C_5^4 = 5$, $C_5^2 = C_5^3 = 10$.

Пример. Рассмотрим сколькими способами из четырех философов математики Паскаля, Канта, Декарта и Лейбница можно выбрать трех философов, для изучения на спецкурсе по философии математики, состав которых отличается, по крайней мере, одним философом.

Чтобы определить число интересующих нас вариантов, можно посчитать число сочетаний C_4^3 или C_4^1. Напомним, что сочетания считаются различными, если они отличаются хотя бы одним элементом. Всего $C_4^3 = C_4^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ способами можно выбрать трех философов математики:

(Паскаль, Кант, Декарт),

(Паскаль, Кант, Лейбниц),

(Паскаль, Декарт, Лейбниц),

(Кант, Декарт, Лейбниц).

Пример. Посчитаем сколько карточек Лотто-Миллион нужно купить и заполнить, чтобы на них оказались все комбинации по 6 номеров из 49 возможных.

Нужное количество карточек равно числу сочетаний из 49 элементов по 6, т. е.

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!},$$

а это составляет почти 49 млн. вариантов. Мораль проста: «для реализации подобной идеи уже надо быть миллионером».

Заметим, что если на карточке угадано 5 номеров, то это значит, что из 6 выпавших номеров могут быть вычеркнуты любые 5 из них, а из остальных 43 номера – только 1. Поэтому, в силу *комбинаторного принципа умножения*, число способов угадать 5 номеров выигрышного тиража равно $C_6^5 \cdot C_{43}^1$. Точно также карточек с совпавшими 4 номерами теоретически может быть $C_6^4 \cdot C_{43}^2$.

Большинство задач этого раздела содержит слова «*сколько*». Одна из причин, по которой мы иногда затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

Задачи с решениями

Заметим, что при решении комбинаторных задач следует прежде всего ответить на следующие вопросы:

1. Из какого конкретно множества осуществляется выбор? Соответственно, надо найти n, т. е. число элементов этого множества.

2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки), или выбрать часть упорядоченного подмножества (размещение)?

3. Важен ли при выборе порядок? Если важен, то применяем формулу для размещений, если нет – формулу для сочетаний.

1. *Сколькими способами 7 девушек–студенток могут организовать хоровод на концерте студенческих талантов ФФСН?*

Для решения отметим одну из девушек, например, отличницу. Теперь надо указать, где будут располагаться остальные девушки: кто будет первой по кругу от отличницы, кто второй, третьей, …, шестой. Задача свелась к подсчету способов расположения шести оставшихся девушек в последовательность, т. е. речь идет о всех перестановках из n–1 элементов, где $n = 7$. Число таких перестановок равно $P_{n-1} = (n-1)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

2. *Возьмем буквы А, Б и Р. Какие конкретные перестановки из этих букв можно получить и сколько таких наборов получится?*

Получатся следующие перестановки: *БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА* и всего по формуле числа перестановок получим $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ наборов.

3. *Студенту–заочнику в щадящем для него режиме необходимо пересдать 3 экзамена на протяжении 6 дней. Сколько всего вариантов теоретически существует для дней сдачи этих экзаменов?*

Искомое число способов равно числу 3-элементных упорядоченных подмножеств, т. е. дней сдачи экзаменов, из 6-элементного множества дней. По формуле числа размещений это число равно $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

4. *Из группы философов, играющих в шахматы, состоящей из 25 человек, надо выбрать шахматную команду из четырех человек, играющих на I, II, III и IV доске. Сколькими способами это можно сделать?*

Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число всех способов – это число размещений из 25 по 4, т. е.:

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{21!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600 \text{ способов.}$$

5. *Возьмем следующие плоды: банан (Б), ананас (А) и киви (К). Какие сочетания из этих плодов, взятых по два, можно составить любителю экзотических фруктов и сколько всего таких наборов получится?*

Получатся наборы: *БА* (заметим, что "банан, ананас" и "ананас, банан" – один и тот же набор), *АК* и *КБ*. Всего по формуле числа сочетаний получим $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$ набора.

6. *На факультете общественных профессий в танцевальном кружке занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15 человек, в вокальном – 12 человек и в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами* *можно составить студенческую бригаду художественной самодеятельности из 3 художников, 4 чтецов, 5 певцов и одного фотографа?*

Разобьем эту задачу на следующие подзадачи:

1. Сначала найдем, сколькими способами можно выбрать танцоров. При выборе 3 танцоров из 10 порядок не важен, т. е. используем формулу для числа сочетаний

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

2. Найдем, сколькими способами можно выбрать чтецов. При выборе 4 чтецов из 15 порядок не важен, и по формуле для числа сочетаний

$$C_{15}^{4} = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

3. Выбираем теперь певцов. Для этого используем формулу для числа сочетаний C_{12}^{5}, где

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

4. Наконец выберем фотографа. Используем формулу для числа сочетаний C_{20}^{1}, где

$$C_{20}^{1} = \frac{20!}{1! \cdot 19!} = 20.$$

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем для получения искомого решения *комбинаторный принцип умножения*:

$$C_{15}^{4} \cdot C_{10}^{3} \cdot C_{12}^{5} \cdot C_{20}^{1} = 2594592000 \text{ способами.}$$

7. *В студенческой группе 15 юношей и 20 девушек. Для концерта на "День знаний" надо выделить 3 творческих дуэта: танцевальный, вокальный и инструментальный. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все юноши и девушки могут более-менее сносно танцевать, петь, играть на некоторых музыкальных инструментах, а дуэт должны составлять юноша и девушка?*

Найдем, сколькими способами для концерта можно выбрать юношей. Мы выбираем 3-х юношей из 15 и при выборе важен порядок, так как в списке избранных фамилии естественно записать в следующем порядке, а именно, кто танцор, кто певец, а кто музыкант. Таким образом применяя формулу для числа размещений, получаем

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730.$$

Найдем, сколькими способами для концерта можно выбрать девушек. Мы выбираем 3-х девушек из 20 и при их выборе по-прежнему порядок важен. Таким образом применяя формулу для числа размещений, получаем

$$A_{20}^{3} = \frac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840.$$

Для того чтобы найти окончательный ответ, согласно *комбинаторному принципу умножения*, потому что выбираются и девушка и юноша, перемножим полученные числа

$$A_{15}^3 \cdot A_{20}^3 = 2730 \cdot 6840 = 18673200 \text{ способами.}$$

8. *Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, *если цифры в числах не повторяются?*

Выбираем 3 цифры из 7, а так как порядок их выбора важен то получим:

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \text{ способов.}$$

9. *В студенческой группе философов 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать двух студентов–философов одного пола.*

Можно выбрать двух девушек или двух юношей. Так как 2-х девушек из 12 можно выбрать без учета порядка C_{12}^2 способами, где

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66,$$

а 2-х юношей из 16 можно выбрать C_{16}^2 способами, где

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = 120,$$

то применяя *комбинаторный принцип сложения*, так как выбираем пару девушек или пару юношей, окончательно получаем: $C_{12}^2 + C_{16}^2 = 66 + 120 = 186$.

10. *В книжном магазине в отделе «Философия» продают 9 книг зарубежных авторов по философии и 7 книг по философии белорусских авторов. Сколькими способами можно выбрать:* **а)** *3 книги по философии;* **б)** *6 книг по философии только зарубежных или только белорусских авторов;* **в)** *4 книги по философии зарубежных авторов и 3 книги белорусских авторов?*

а) Так как не указано книги каких авторов нужно выбирать, то выбрать 3 книги из 9 + 7 = 16 можно C_{16}^3 способами. Поэтому получаем, что

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560 \text{ способами.}$$

б) Выбрать 6 книг зарубежных авторов можно $C_9^6 = 84$ способами, а 6 книг белорусских авторов $C_7^6 = 7$ способами. По *комбинаторному принципу сложения* выбрать 6 книг по философии только зарубежных или только белорусских авторов можно

$$C_9^6 + C_7^6 = 84 + 7 = 91 \text{ способом.}$$

в) Выбрать 4 книги зарубежных авторов из 9 можно C_9^4 способами, а 3 книги белорусских авторов из 7 можно C_7^3 способами. Поэтому число наборов, состоящих из 4 книг зарубежных авторов и 3 книг белорусских авторов, можно составить по *комбинаторному принципу умножения*

$$C_9^4 \cdot C_7^3 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 4410 \text{ способами.}$$

11. *В группе студентов философского отделения 17 девушек и 3 юношей. Из них выбирают по жребию трех человек в оргкомитет «Дня философа». Сколько существует способов выбрать в оргкомитет 2 девушек и 1 юношу?*

Двух девушек из 17 можно выбрать C_{17}^2 способами, а одного юношу из 3 можно выбрать C_3^1 способами. Тогда по *комбинаторному принципу умножения* 2 девушек и 1 юношу можно выбрать

$$C_{17}^{2} \cdot C_{3}^{1} = \frac{17!}{2! \cdot 15!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 17}{2} \cdot 3 = 408 \text{ способами.}$$

12. *Студенты философского отделения сдают экзамен по «Философии и методологии науки». В группе философов 24 человека, из них формируют 2 подгруппы по 12 человек. Среди студентов есть 5 отличников. Сколько существует способов для формирования этих подгрупп, так чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 отличника – в другую.*

Сформируем первую подгруппу – в ней должно быть 2 отличника и 10 не отличников. Во-первых 2 отличников выбираем из 5 отличников, а именно C_5^2 способами. Далее выбираем 10 неотличников из 24 –5 = 19 остальных студентов. Так как из 24 студентов 5 отличников нужно исключить, то это можно осуществить C_{19}^{10} способами. Таким образом, по *комбинаторному принципу умножения*, 2 отличников и 15 не отличников можно выбрать

$$C_5^2 \cdot C_{19}^{10} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{19!}{10! \cdot 9!} = 10 \cdot 92378 = 923780 \text{ способами.}$$

Для второй подгруппы выбираем 3 отличника из 5 отличников и 9 неотличников из 19 остальных студентов, этот выбор можно осуществить

$$C_5^3 \cdot C_{19}^{9} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{19!}{9! \cdot 10!} = 10 \cdot 92378 = 923780 \text{ способами.}$$

По *комбинаторному принципу сложения*, сформировать подгруппы так, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 отличника в другую можно сделать

$$C_5^2 \cdot C_{19}^{10} + C_5^3 \cdot C_{19}^{9} = 923780 + 923780 = 184756 \text{ способами.}$$

Успехов им на экзамене!

Задачи

13. *Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом в столовой?*

14. *Сколькими способами можно посадить 7 человек за круглый стол переговоров?*

15. *Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?*

16. *В книжный магазин привезли 20 новых книг, из них по социологии – 5 книг, по философии – 8 книг, по психологии – 4 книги и по высшей математике – 3 книги. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеки, так чтобы в него входило 3 книги по социологии, 5 книг по философии, 3 книги по психологии и 2 книги по высшей математике?*

17. *В книжном магазине в естественнонаучном отделе продают 6 книг по высшей математике для юристов и 4 книги по высшей математике для философов. Сколькими способами можно выбрать:* **а)** *4 книги по высшей математике для гуманитариев;* **б)** *3 книги по высшей математике для юристов и 2 книги по высшей математике для философов*?

18. *Сколькими способами 3 награды (за* I, II, III *места) могут быть распределены между 10 участниками математической олимпиады*?

19. *Возьмем из разрезной азбуки следующие буквы:* А, Б, В, Е, Д. *Какие перестановки из этих букв можно получить и сколько всего таких наборов получится?*

20. *Колода состоит из 36 карт. Сколько всего существует способов извлечь одну даму и двух королей, без учета их масти?*

2.3. Вероятность элементарного события

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента. Осуществление такого опыта или эксперимента называется *испытанием*. Понятие «*вероятности*» зависит от того, что мы понимаем под ***испытанием***. Оставив термин «*испытание*» неопределенным, будем предполагать, что он отвечает следующим условиям:

а) *исход (результат) испытания точно неизвестен, т. е. испытание даст более одного исхода;*

б) *конечное множество всех исходов может быть определено до начала испытания;*

в) *испытание можно повторить неограниченное число раз при тех же условиях.*

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементарной теории вероятностей, с которой предполагается ознакомить студентов–заочников в этом разделе. Напомним, что *игральная кость* – это кубик с округленными углами, на гранях которого нанесены точки, изображающие числа от 1 до 6. Опыт, состоящий в бросании кости, представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. *Множество всех исходов испытания называется множеством (пространством) элементарных событий, а* ***событием*** *– подмножество множества элементарных событий*.

Рассмотрим следующий **пример** испытания. Если из колоды в 36 игральных карт вытаскивается наудачу (не глядя) 6 любых карт, то тогда множество элементарных событий состоит из C_{36}^{6} элементов.

Определение случайного события. *Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется* ***случайным событием***.

Определение вероятности. *Числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в* *тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях, называется* ***вероятностью***.

Для случайного события постулируется мера возможности его появления, т. е. определенная вероятность его наступления при данных условиях. Каждому случайному событию *A* ставится в соответствие, характеризующее его, число **p**(*A*), где $0 \le \mathbf{p}(A) \le 1$ (от первой буквы французского слова *probabilite* – вероятность), которое и называется **вероятностью** события *A*.

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие ***равновозможных*** (или *равновероятных*) событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным и лишь поясняется примерами. Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т.д. Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого эксперимента, принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

Даже если мы не знаем, что такое равновозможность, но если она имеет смысл, то ею должны обладать грани симметричной кости. Естественно ожидать, что при многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$.

Какова в таком случае вероятность события *A* – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию *A*, то вероятность **p**(*A*) можно считать равной $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Определение классической вероятности. *В условиях равновозможности исходов элементарных событий классическая вероятность события A равна* $\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n}$*, где* n *– число всех равновозможных исходов испытания, а* m *– число исходов, составляющих событие A.*

Иначе говоря, классическая вероятность события по ***формуле классической вероятности*** равна отношению числа исходов, *благоприятствующих* наступлению этого события, к *общему числу* всех равновозможных исходов.

В теории вероятностей классическим является ***эксперимент с урной***, из которой надо не глядя извлекать *одинаковые шары разных окрасок*.

Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых – белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Схема опыта настолько проста, что кажется очевидной, хотя, в сущности, все проблемы, относящиеся к случайным событиям, связанным с экспериментами с подбрасыванием игральной кости или монеты, упрятаны «во тьму урны». Хотя классики науки «математики случайного» довольно широко пользовались *урновой схемой*, смысл из нее они извлекали различный. Рассмотрим, например, ***задачу о выборке***, имеющую практические применения в разных областях знания.

Задача о выборке. *В урне всего n шаров, из них m белых и $n - m$ черных шаров. Из урны наудачу вынимается k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых k шаров окажется l белых*?

Исход этого испытания состоит в появлении любых k шаров из общего числа n шаров. В данном примере событие A = {среди вынутых k шаров окажется l белых}. Поскольку нас не интересует порядок появления этих шаров, то число всех исходов равно числу сочетаний C_n^k. Заметим, что мы извлекаем не только l белых шаров, но и оставшиеся $k–l$ черных. Очевидно, что $0 \le l \le m$ и $0 \le k–l \le n–m$ в противном случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь l белых шаров из имеющихся в урне m белых шаров можно C_m^l способами. Соответственно извлечь $k–l$ черных шаров из n m черных шаров можно C_{n-m}^{k-l} способами. По *комбинаторному принципу умножения* число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$. Следовательно, искомая вероятность в задаче о выборке по *формуле классической вероятности* равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}.$$

Далее будет рассмотрено обобщение этой задачи.

Задачи с решениями

1. *На полке стоит 10 книг, из них 6 по высшей математике и 4 книги по философии. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только одна книга?*

В этой задаче n = 10 – это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, а m = 6 – это число исходов, благоприятствующих событию A = {выбрана книга по высшей математике}. Поэтому по *формуле классической вероятности*

$$\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

2. *Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность следующих событий:* **а)** *сумма выпавших очков равна 7;* **б)** *сумма выпавших очков равна 8, а разность 4.*

Для случая **а)** $n = 36$, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на одной и второй игральных костях. Для первой кости 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6, следовательно, для первой и второй, согласно *комбинаторному принципу умножения* – 36. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. $m = 6$, и поэтому

$$\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Для случая **б)** как и в случае **а)** $n = 36$. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. $m = 2$, и поэтому

$$\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

3. *Какова вероятность появления слова* ДВА, *если наугад выбираются 3 карточки из пяти с буквами* А, Б, В, Г, Д *и располагаются в ряд в порядке появления?*

Число всех исходов испытания состоит в выборе 3-х букв из 5, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $\mathrm{A}_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один.

Следовательно, искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60} \approx 0{,}02.$$

4. *Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?*

Для решения этой задачи можно применить *общую схему задачи о выборке*. Общее число всех исходов события A = {среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы} равно числу сочетаний C_{36}^6. Вытянуть 1 короля из 4, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4, соответственно, C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из 36 – 4 – 4 = 28 карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^3 способами. Таким образом, согласно известному *комбинаторному принципу умножения*, число благоприятных исходов для события A равно произведению $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{28}^3}{\mathrm{C}_{36}^6} = \left(\frac{4}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!}\right) / \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!}\right) \approx 0{,}04.$$

5. *Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово* ФИЛОСОФИЯ, *выбирают наугад последовательно 4 шара и укладывают один* *за другим в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом сложится слово* СОЛО*?*

Число всех равновозможных исходов этого испытания – это число всех 4-х буквенных «слов», составленных из 9 «растождествленных» букв $Ф_1$, $Ф_2$, $И_1$, $И_2$ $Л_1$, $О_1$, $О_2$, $С_1$, $Я_1$, число которых равно числу размещений $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$ 3024. Число благоприятных исходов составления слова СОЛО равно числу $A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1 = 2$, где $\mathrm{A}_1^1 = 1$ – это число размещений для букв С и Л, и $A_2^1 = 2$ – это число размещений для двух из двух букв О. Следовательно искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(«СОЛО») = \frac{\mathrm{A}_1^1 \cdot \mathrm{A}_1^1 \cdot \mathrm{A}_2^1}{A_9^4} = \frac{2}{3024} = \frac{1}{1512}.$$

Это вариант задачи об «упорядоченной» выборке.

Задачи

6. *Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность следующего события* $A = \{$*сумма выпавших очков равна* $8\}$.

7. *Какова вероятность появления слова* ТРИ*, если наугад выбираются 3 карточки из шести с буквами* А, И, Т, О, М, Р *и располагаются в ряд в порядке появления?*

8. *Из 30 экзаменационных билетов студент может ответить на 24. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене на билет при однократном извлечении билета?*

9. *Из карточек, из которых составлено слово* ДИСПЛЕЙ*, случайным образом выбраны 3 и выложены в ряд. Какова вероятность, что они образовали слово* ЛЕС*?*

10. *Студент из 30 вопросов к экзамену хорошо усвоил 24. Какова вероятность, что он знает оба из доставшихся ему вопросов?*

2.4. Вероятность сложного события

Два события называются ***совместными***, *если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании*.

Примеры совместных событий: идет дождь и идет снег, человек ест и человек читает, число целое и четное.

Примеры несовместных событий: день и ночь, человек читает и человек спит, число иррациональное и четное. Заметим, что если $A \cap B = \varnothing$, то события A и B ***несовместны***.

Два события называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. **Например**, если сейчас день, то сейчас не ночь; если человек спит, то в данный момент он не читает; если число нечетное, то оно не является четным.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом. Событие называется ***невозможным***, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Примеры: если в урне все шары белые, то достать белый шар является достоверным событием, а достать черный шар является невозможным событием; если человек прыгнул в воду, то выйти мокрым является достоверным событием, а выйти сухим является невозможным событием.

Утверждение. *Для несовместных событий A и B имеет место* ***теорема сложения вероятностей***

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B),$$

т. е. вероятность объединения (суммы) двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Например, пусть A – «идет дождь», а B – «идет снег», тогда $A \cup B$ – «идет дождь или идет снег, или идет дождь со снегом».

Если A – «пошли студенты на дискотеку» и B – «пошли студенты в библиотеку», то тогда $A \cup B$ – «пошли студенты либо на дискотеку, либо в библиотеку».

Пример. При бросании двух игральных костей событие $A = \{$выпало 5 очков$\}$ и событие $B = \{$выпало 10 очков$\}$ несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$. Поэтому вероятность события $A \cup B = \{$выпало число очков, кратное 5$\}$ можно вычислить, в силу предыдущего утверждения, по формуле $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$.

Всего исходов в этом испытании по комбинаторному правилу умножения равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов для события A четыре – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B три благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}.$$

Пример. Студент философского отделения сдаст зачет по курсу «Основы высшей математики», если по пятибалльной системе получит оценку не ниже 4 баллов. Какова вероятность сдачи зачета, если известно, что студент получает оценку 5 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и оценку 4 с вероятностью $\frac{1}{3}$?

Вероятности получения оценок 5 и 4 по курсу «Основы высшей математики» определены из опыта проведения зачетов в предыдущие годы. В этом испытании событие $A = \{$на зачете студент получил оценку 5$\}$ и событие $B = \{$на зачете студент получил оценку 4$\}$ несовместны. Поэтому, по *теореме сложения вероятностей* вероятность интересующего нас события $A \cup B = \{$зачет студентом философского отделения сдан$\}$ равна

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Формулу для вероятности объединения двух несовместных событий можно обобщить на любое число попарно несовместных событий.

Установим теперь полезную для приложений связь между вероятностями исходного и противоположного события, т. е. между событием A и его дополнением $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$, где $A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$.

Например, при бросании игральной кости сумма вероятностей события A = {выпадет шестерка} и противоположного события $\overline{A}$ = {шестерка не выпадет} равна единице, так как вероятность достоверного события $\boldsymbol{U}$ равна 1, т. е. $\mathbf{p}(\boldsymbol{U}) = 1$.

Замечание. *Из теоремы сложения вероятностей следует, что для каждого события A верно равенство*

$$\mathbf{p}(A) = 1 - \mathbf{p}(\overline{A}).$$

Пример. Рассмотрим испытание, в котором бросается две монеты. Чему равна вероятность выпадения хотя бы одного орла?

Пусть событие A = {выпал орел при подбрасывании первой монеты}, а событие B = {выпал орел при подбрасывании второй монеты}. Требуется найти вероятность события $A \cup B$ = {выпал хотя бы один орел при подбрасывании двух монет}.

Легко видеть, что $\mathbf{p}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{p}(B) = \frac{1}{2}$, но $\mathbf{p}(A \cup B) \neq 1$, так как событие $A \cup B$ не является достоверным. Заметим, что в рассматриваемом случае, $\mathbf{p}(A \cup B) \neq \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B)$, поскольку события A и B не являются несовместными, точнее они совместны и $A \cap B \neq \varnothing$. При бросании двух монет могут произойти следующие 4 события: (О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р). Благоприятными для события $A \cup B$ являются 3 события, следовательно, $\mathbf{p}(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

Утверждение. *Для любых событий A и B справедлива* ***формула для вероятности объединения (суммы) событий*** *вида*

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B).$$

Пример. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Пусть событие A = {выпадение 6 на первой кости} и событие B = {выпадение 6 на второй кости}. Вероятность $\mathbf{p}(A \cup B)$ можно вычислить, в силу предыдущего утверждения, по формуле $\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B)$. Очевидно, что $\mathbf{p}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{p}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{p}(A \cap B) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, поэтому

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Мы определили ранее вероятность события как некоторую числовую характеристику возможности его наступления. Такую вероятность называют ***безусловной вероятностью***, подчеркивая этим, что она не зависит ни от каких дополнительных условий испытания. В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события *A*, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие *B*. В таком случае говорят, что событие *A* зависит от события *B*, а вероятность появления событие *A* называют ***условной вероятностью***. Условная вероятность событие *A* при условии, что произошло событие *B*, *обозначается* $\mathbf{p}(A|B)$, а если событие *B* не произошло, то *обозначается* $\mathbf{p}(A|\overline{B})$, где $\overline{B} = \boldsymbol{U} \setminus B$. Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть из урны, в которой находится 10 белых и 5 черных шаров, вынимается наудачу один за другим 2 шара. Рассмотрим события *B* = {первый вынутый белый} и *A* = {второй вынутый белый}.

Очевидно, что $\mathbf{p}(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Вероятность события *A* в этом испытании зависит от того, произошло событие *B* или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие *B* произошло, то среди оставшихся 14 шаров только 9 белых и поэтому вероятность события *A* будет равна $\mathbf{p}(A) = \frac{9}{14}$. Если событие *B* не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черный, то среди оставшихся 14 шаров будет 10 белых и поэтому вероятность события *A*, в этом случае, равна $\mathbf{p}(A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Таким образом, вероятность события *A* зависит от того, произошло или не произошло событие *B*, т. е. это условная вероятность и, в частности,

$$\mathbf{p}(A|B) = \frac{9}{14}, \quad \mathbf{p}(A|\overline{B}) = \frac{5}{7}.$$

Определение условной вероятности. Если вероятность события В, $\mathbf{p}(B) > 0$, *то* ***условной вероятностью*** *события A при условии, что произошло событие B, называют число*

$$\mathbf{p}(A|B) = \frac{\mathbf{p}(A \cap B)}{\mathbf{p}(B)}.$$

В частности, из этого определения следует, что

$$\mathbf{p}(A|\overline{B}) = \frac{\mathbf{p}(A \cap \overline{B})}{\mathbf{p}(\overline{B})}.$$

Утверждение. *Если* $\mathbf{p}(B) > 0$ *или* $\mathbf{p}(A) > 0$, *то тогда справедлива* ***формула для вероятности пересечения (произведения) событий*** *вида*

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(B) \cdot \mathbf{p}(A|B) \quad \text{или} \quad \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A) \cdot \mathbf{p}(B|A).$$

Способ вычисления вероятности пересечения двух событий получен с помощью формулы условной вероятности, т. е. *вероятность пересечения (произведения) двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.*

На практике *теорему умножения* (или *формулу для вероятности пересечения событий*) применяют чаще всего вместе с *теоремой сложения* (или *формулой для вероятности объединения событий*).

Пример. При бросании игральной кости событие A = {выпало простое число очков} и событие B = {число выпавших очков четно} совместны, $A \cap B \neq \varnothing$ и $\mathbf{p}(B) > 0$. Вычислим условную вероятность $\mathbf{p}(A \mid B)$.

Так как событию B благоприятствуют три равновозможных исхода опыта, т. е. выпадение трех чисел 2, 4, 6, из них событию A благоприятствует только выпадение числа 2, т. е. событие $A \cap B$ – это выпадение одного числа 2, то тогда условная вероятность $\mathbf{p}(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

Кроме того, так как событию $\overline{B}$ благоприятствует выпадение трех нечетных чисел 1, 3 и 5, а из них событию A благоприятствует только выпадение чисел 3 и 5, т. е. событие $A \cap \overline{B}$ – это выпадение чисел 3 и 5, то тогда условная вероятность $\mathbf{p}(A \mid \overline{B}) = \frac{2}{3}$.

Пример. Из колоды игральных карт вынимают наугад одну карту, которая оказалась черной масти. Чему равна вероятность того, что вынутая карта дама?

Пусть в этом испытании событие A = {вынута дама}, а событие B = {вынута карта черной масти}. Событию B благоприятствуют 18 исходов этого испытания, из них событию A благоприятствуют 2 исхода. Следовательно, искомая вероятность равна $\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Определение независимых событий. *Событие А называется* ***независимым*** *от события В, если условная вероятность* $\mathbf{p}(A \mid B)$ *равна безусловной вероятности* $\mathbf{p}(A)$*, т. е. выполняется равенство*

$$\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A).$$

Например, из колоды игральных карт вынимают наудачу одну карту. Чему равна вероятность события A = {вынута карта туз}?

Если в колоде 36 карт, то вероятность этого события $\mathbf{p}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Предположим, что событие B = {вынута карта черной масти}. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, равна $\mathbf{p}(A \mid B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Таким образом, условная вероятность $\mathbf{p}(A \mid B)$ равна безусловной вероятности $\mathbf{p}(A)$ и, следовательно, событие A не зависит от события B.

Если вероятность события А принимает разные значения в зависимости от того, произошло событие В или не произошло, то говорят, что событие А ***зависит*** *от события В.*

Например, при подготовке к экзамену две студентки философского отделения успели выучить только первые 10 билетов («счастливых» для них) из 20 экзаменационных билетов по философии Канта. Пусть событие B = {первая студентка вытянула «счастливый» билет}, а событие A = {вторая студентка вытянула «счастливый» билет}.

Если событие B произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 9 «счастливых» и значит $\mathbf{p}(A) = \frac{9}{19}$.

Если событие B не произошло, т. е. первая студентка вытянула «несчастливый» билет, то число «счастливых» билетов среди оставшихся 19 билетов не изменится, и значит $\mathbf{p}(A) = \frac{10}{19}$. Поэтому событие A зависит от события B.

В частности, из *формулы для вероятности пересечения двух событий* следует, что если $\mathbf{p}(A \mid B) = \mathbf{p}(A)$, т. е. если событие A независимо от события B, и $\mathbf{p}(A) > 0$, то по определению условной вероятности $\mathbf{p}(B \mid A)$, имеем

$$\mathbf{p}(B \mid A) = \frac{\mathrm{p}(B \cap A)}{\mathrm{p}(A)} = \frac{\mathbf{p}(B) \cdot \mathbf{p}(A \mid B)}{\mathbf{p}(A)} = \frac{\mathbf{p}(B) \cdot \mathbf{p}(A)}{\mathbf{p}(A)} = \mathbf{p}(B),$$

т. е. тогда событие B также будет независимым от события A.

Замечание. *Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, поэтому можно говорить просто о* ***независимых событиях*** *A и B.*

Если события A и B независимы, то наступление одного из них никак не влияет на шансы наступления другого. Из этого замечания и *формулы для вероятности пересечения событий* вытекает важное следствие.

Утверждение. *Для независимых событий A и B имеет место* ***теорема умножения вероятностей***

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A) \cdot \mathbf{p}(B).$$

Например, пусть двое игроков бросают по одной игральной кости. Рассмотрим следующие события: A = {на 1-й кости выпадает шестерка}, B = {на 2-й кости выпадает шестерка}, тогда событие $A \cap B$ = {выпадают две шестерки}.

Поскольку события A и B независимы, то по *теореме умножения вероятностей* имеем:

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A) \cdot \mathbf{p}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

P.S. Наконец, кое-что радостное – теории для студентов–заочников в этом методическом пособии больше не будет!

Задачи с решениями

1. *В группе студентов–философов после отчисления из оставшихся 15 девушек и 3 юношей выбирают по жребию 3-х человек в новый оргкомитет*

«Дней философа». Какова вероятность того, что в составе выбранных окажется 2 девушки и 1 юноша?

Число всех равновозможных исходов этого испытания (обозначим его через n) заключается в выборе 3 студентов из 18 – это число равно

$$C_{18}^{3} = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816 \text{ возможностям.}$$

Поэтому n = 816.

Число благоприятных исходов (обозначим его через m) – это выбор 2-х девушек из 15, т. е. это $C_{15}^{2} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 105$ возможностей, и выбор 1-го юноши из 3, т. е. это $C_{3}^{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ возможности. Двух девушек и одного юношу, согласно *комбинаторному принципу умножения*, можно выбрать

$$C_{15}^{2} \cdot C_{3}^{1} = 105 \cdot 3 = 315 \text{ способами.}$$

Поэтому m = 315.

Следовательно, вероятность события A = {среди выбранных студентов окажется 2 девушки и 1 юноша} по *формуле классической вероятности* равна

$$\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{315}{816} \approx 0{,}39.$$

2. *В магазин "Академкнига" поступило 20 новых книг по философии и методологии науки, из них 10 книг российских авторов, 6 книг западноевропейских авторов и 4 книги белорусских авторов. Покупатель случайно выбирает одну из новых книг по философии и методологии науки. Найти вероятность, что наудачу купленная книга по философии и методологии науки окажется российского или западноевропейского автора.*

Первый способ. Событие A = {куплена книга по философии и методологии науки российского автора}, событие B = {куплена книга по философии и методологии науки западноевропейского автора}, тогда событие $A \cup B$ = {куплена книга по философии и методологии науки российского или западноевропейского автора}. Соответственно, *по формуле классической вероятности* имеем

$$\mathbf{p}(A) = \frac{10}{20} = 0{,}5 \quad \text{и} \quad \mathbf{p}(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

События A и B являются несовместными, следовательно, по *теореме о сложении вероятностей*

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8.$$

Второй способ. Рассмотрим событие C = {куплена книга по философии и методологии науки белорусского автора}, тогда событие $\bar{C}$ = {куплена книга по философии и методологии науки небелорусского автора}. Заметим, что $A \cup B = \bar{C}$. Поскольку $\mathbf{p}(C) = \frac{4}{20} = 0{,}2$, то следуя замечанию после теоремы о сложении вероятностей, т. к. $\mathbf{p}(C) + \mathbf{p}(\bar{C}) = 1$, имеем

$$\mathbf{p}(\bar{C}) = 1 - \mathbf{p}(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

3. *Студент заочного отделения философского отделения выучил 40 тестовых вопросов из 60 по курсу «Основы высшей математики». Каждый* *зачетный билет состоит из двух тестовых вопросов, распределенных случайным образом. Найдите вероятность того, что студент:* **а)** *знает оба тестовых вопроса из вытащенного наугад зачетного билета;* **б)** *знает хотя бы один тестовый вопрос из вытащенного наугад зачетного билета*.

а) Общее количество исходов такого испытания равно числу сочетаний из 60 по 2, так как порядок тестов в зачетном билете несущественен, т. е. $n = C_{60}^2 = \frac{60!}{2!\cdot 58!} = \frac{59\cdot 60}{2} = 1770$. Количество благоприятных исходов для события A = {студент–заочник знает оба тестовых вопроса из доставшихся ему двух} равно $m = C_{40}^2 = \frac{40!}{2!\cdot 38!} = \frac{39\cdot 40}{2} = 780$. Таким образом, по *формуле классической вероятности*

$$\mathbf{p}(A) = \frac{m}{n} = \frac{780}{1770} \approx 0{,}44.$$

б) Рассмотрим событие B = {студент–заочник знает хотя бы один тестовый вопрос из доставшихся двух}. Тогда событие $\overline{B}$ = {студент–заочник не знает ни одного тестового вопроса из доставшихся двух} и $\mathbf{p}(B) + \mathbf{p}(\overline{B}) = 1$. Количество благоприятных исходов для события $\overline{B}$ – это число сочетаний $m = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$ и поэтому, по *формуле классической вероятности*

$$\mathbf{p}(\overline{B}) = \frac{m}{n} = \frac{190}{1770} \approx 0{,}11.$$

Следовательно, $\mathbf{p}(B) = 1 - \mathbf{p}(\overline{B}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$.

4. *На полке 10 книг по английскому языку и 5 по философии. Из них берут наугад 2 книги подряд.* **а)** *Найти вероятность появления книги по философии при втором испытании, если при первом взяли книгу по философии.* **б)** *Найти вероятность того, что обе книги оказались по английскому языку.*

а) Пусть событие A = {первой взяли книгу по философии}, событие B = {второй взяли книгу по философии}.

События A и B зависимые, условная вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило ($m = 5 - 1 = 4$ – это столько осталось книг по философии, $n = 15 - 1 = 14$ – это столько осталось всего книг), будет равна

$$\mathbf{p}(B\,|\,A) = \frac{4}{14} \approx 0{,}29.$$

б) Пусть событие A = {первой взяли книгу по английскому языку}, событие B = {второй взяли книгу по английскому языку}, событие $A \cap B$ = {обе взятые книги по английскому языку}. Нам нужно найти вероятность $\mathbf{p}(A \cap B)$, имеем

$$\mathbf{p}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{p}(B\,|\,A) = \frac{9}{14}.$$

События A и B зависимые, значит по *формуле вероятности пересечения событий*:

$$\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\cdot\mathbf{p}(B\,|\,A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14} \approx 0{,}43.$$

5. *Тридцать экзаменационных билетов по мировоззренческому курсу «Философия древнего мира» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту–философу билет с номером, кратным 2 или 3 ?*

Обозначим события: A = {вытянут билет с четным номером}, B = {вытянут билет с номером, кратным 3}, $A \cap B$ = {вытянут билет с четным номером, кратным 3}. Найдем вероятность искомого события $A \cup B$. Поскольку A и B – это совместные события, то вероятность события $A \cup B$, по *формуле для вероятности объединения событий*, равна

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B).$$

Событию A благоприятствуют 15 исходов, событию B – всего 10 исходов, а событию $A \cap B$ – только 5 исходов. Убедиться в этом самостоятельно. Поэтому искомая вероятность равна

$$\mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B) =$$
$$= \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{,}667.$$

P.P.S. Настоятельно рекомендуем всем студентам посмотреть разобранные задачи в многочисленных «решебниках» по теории вероятности.

Задачи

8. *В числе студентов – активистов факультета философии и социальных наук – 12 девушек и 4 юношей. Из них выбирают по жребию 5-х человек в оргкомитет «Дней университета». Какова вероятность того, что в составе выбранных окажется три девушки и двое юношей?*

9. *На книжной полке 15 книг по философии науки, 9 книг по математике для нематематиков и 6 книг по разговорному английскому языку. Наудачу выбирают 6 книг. Какова вероятность того, что выбраны: 1 книга по разговорному английскому языку, 2 книги по математике для нематематиков и 3 книги по философии науки?*

10. *В художественной лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыш падает на 10 билетов. Студент – любитель современного искусства – покупает 4 билета. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выиграет?*

11. *Студент–заочник знает ответы на 20 тестовых вопросов из 25. Пусть они для него будут «счастливые». Предположим, что три вопроса задаются лектором последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса – «счастливые».*

12. *Имя одного из первых философов–математиков* ФАЛЕС *составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешаны. Три карточки наудачу извлекаются и раскладываются по очереди в ряд. Какова вероятность получить таким путем слово* ЛЕС?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ОБ ОБЩЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ СТУДЕНТОВ–ФИЛОСОФОВ: СУБЪЕКТИВНЫЕ ЗАМЕТКИ

Главные информационные новости в области университетского образования постсоветского периода связаны с реформой абитуриентских испытаний – в основном как поступить на рекламно-модную экономическую, юридическую или другую не очень математически сложную социально-гуманитарную специальность. Но почему так мало в средствах массовой информации и даже в специализированных профессиональных изданиях говорится о главных проблемах гуманитарного университетского образования? Речь идет о том «чему», «как» и «зачем» учить абитуриентов, поступивших на бюджетные места, а особенно значительную часть плохо подготовленных студентов, зачисленных на платное обучение. Как правило, эти вопросы не обсуждается. В наше время, на наш взгляд, наиболее актуальны вопросы: «как» и «зачем»? Хочется думать, что математика и философия, как существенные составляющие университетской культуры, имеют прямое отношение к этим вопросам. Но так ли это на самом деле?

Умеют ли студенты-гуманитарии научно мыслить? Можно спросить и по другому: «Можно ли считать, что математики, философы и гуманитарии мыслят одинаково?» Для содержательного ответа на эти вопросы из сферы «социокультурных детерминаций» гуманитарной науки мы не можем обойтись, как бы это ни прозвучало на первый взгляд странно, без философско-математического дискурса. Любая абстрактная математическая и образовательная модель может иметь некоторую ценность для философско-методологического анализа, даже в том случае, когда она пока еще не подтверждена эмпирически или никогда не получит такого подтверждения. Основной аргумент в защиту философско-математического дискурса основан на понимании истины как чего-то всеохватного, включающего различные способы проникновения в истину. Термин «дискурс» происходит от латинского «discurrere» – «обсуждение», «переговоры» и даже «перебранка», хотя основная цель дискурса изначально предполагает взаимопонимание, поскольку иначе включение в дискурс невозможно.

Почему-то иногда считается, что невысокий уровень современного философского и социально-гуманитарного образования – это следствие глобальной экономической нестабильности и вульгарно-рыночных отношений. Надо признать, что в этом есть доля правды, так как в условиях коммерциализации всей жизни общества «преподавание становится величайшим актом оптимизма». Анализу главных проблем образования не способствует и удивительная «лень ума» рулевых университетского образования, не желающих продумать до конца сложившуюся ситуацию с качеством университетского образования. Вопреки негативным тенденциям хорошее университетское образование по-прежнему держится на оригинально мыслящих университетских преподавателях, в которых есть трудно уловимая для большинства «упругость экзистенции», упрямо преломляющая сопротивление хорошему образованию на свой, только им известный, позитивный лад.

* * *

Напомним, что античное представление о мире, воспринятое затем классической философией математики, заключается в том, что его существование, прежде всего, неизбежно и необходимо, поэтому нет нужды специально оправдывать его существование. Сказанное можно отнести и к философии университетского образования. Такая вера в существование философских сущностей, стоящих за соответствующими концепциями, не требующими обоснования, отличается от позиции немецкого классика Иммануила Канта, предпочитавшего считать, что концептуальные явления любой науки имеют ту же онтологию, что и эмпирические данные. В «Критике чистого разума» он писал: «*Математик, естествоиспытатель, логик, как бы далеко не продвинулись вперед первые в познаниях разума, а последний особенно в философском познании, все же могут быть только виртуозами разума*». Но даже эта пусть скромная, но важная миссия математиков в формировании качественного философского и социально-гуманитарного образования все еще явно недооценивается.

От сомнительных философских спекуляций на тему качества университетского образования иногда можно спастись только в «надежной гавани» общего математического знания. Философско-методологические аспекты развития математического знания и образования в контексте единства науки и культуры дополняют, развивают и даже проясняют различные гуманитарные и естественнонаучные критерии и идеалы научного знания. Потребность в целостном осмыслении действительности способствует выявлению влияния социокультурных факторов на генезис и историю становления научных теорий. Рассматривая математическое образование студентов-гуманитариев с этой точки зрения, несмотря на разный уровень строгости аргументации, все же можно говорить об общности интеллектуальных задач философского, социально-гуманитарного и математического знания. Методология и философия математики прошлого столетия дает серьезные основания для такого подхода к современному университетскому образованию.

Специфика гуманитарного знания состоит в том, что ее определяет сам человек. Именно поэтому гуманитарное познание вращается в своеобразном «гносеологическом круге», в котором мыслящий человек изучает сам себя. Не удивительно поэтому, что влияние математики на гуманитарные специальности не столь очевидно. Между тем, с точки зрения познания, математика – важнейший дополнительный фактор влияния на гуманитарное знание. Когда происходит абстрагирование мысли, отрыв ее от конкретного содержания, то всегда происходит обратный процесс поглощения явного неявным, что можно назвать онтологическим основанием рассматриваемой операции. Существует определенная дихотомия типов рациональности в онтологии познания, конструирующих математику и естественные науки как познание мира в данности, а гуманитарные науки как познание мира в возможности. Это различие обусловлено тем, что гуманитарные науки в «знаниевом аспекте» представляет собой менее определенные и потому более сложные гносеологические образования, чем естественные науки.

Уместно заметить, что в современной неклассической математике, в прочем также как и в любой социально-гуманитарной деятельности, есть недоказуемые и неопровержимые утверждения, а также неразрешимые проблемы. Однако это не чуть не портит добродетельно «знаниевую» репутацию математики, сформированную всей историей существования теоретической математики, как безупречного метода достижения наиболее достоверного знания об окружающем нас мире. Корректность обоснований и рассуждений, достоверность и однозначность заключений – это как раз те философско-методологические вопросы, которые представляют особый гносеологический интерес для специалистов-профессионалов социально-гуманитарных профессий. Поскольку обосновательные критерии и концептуальные соглашения являются необходимыми составляющими философско-аналической и социально-гуманитарной деятельности, то соответствующие методологические исследования не могут обойтись без рационалистических средств познания.

Общее развитие математики традиционно связано с различными объективными факторами, важнейшими среди которых являются ее приложения, решение математических проблем и разработка новых теорий. Актуальность того или иного раздела математики имеет побочный интерес, относящийся к «профессионально полезному» образованию смежных профессий. Как правило, именно практически полезные темы в математике любого уровня строгости обладают наибольшей эстетической ценностью. Эмоциональное удовлетворение от создаваемых математиками образов, обладающими красотой, оправдывает отнесение математики к женскому роду: «Первое правило вежливости для женщины – быть красивой или хотя бы не быть некрасивой». Но в наше время очень много людей с университетским гуманитарным образованием, которые совершенно нечувствительны к эстетической привлекательности математики. Возможно, это происходит потому, что математически необразованному человеку довольно трудно определить математическую красоту, хотя, справедливости ради, то же самое можно сказать о красоте любого рода. Однако более объективная точка зрения на развитие математики связана не только с практическими следствиями из нее, но и с философско-методологической значимостью математических идей.

В частности, притягательность математики для философии связана, прежде всего, с феноменальной устойчивостью на протяжении многих веков математических результатов. По существу, только математикам удалось придать своим теоретическим конструкциям столь общепризнанный и неопровержимый характер, хотя и трудно в целом обозреть всю математику, подобно тому, как гласит известная пословица «за деревьями леса не видно». Но если отбросить громоздкие и нехарактерные детали, то тогда возникает общая теория, которая может оказаться проще и яснее отдельных убедительных примеров. Напомним, что если философия есть общая наука о содержании, то математика – это наиболее общая и точная наука о форме. Всякое точное объяснение того или иного явления, как правило, математично, а любое математическое описание явления – это описание на подходящем для этого языке математики. Поэтому можно сказать, что философия дополняется математикой, поскольку математика помогает философии углубляться в понятие числа, пространства и времени, используя для этого соответствующий гуманитарно-математический язык, который в редких случаях оказывается языком обычной логики.

* * *

Поскольку полезность теории зависит от ее назначения, то для различных целей можно принимать дополняющие друг друга подходы и, в этом смысле, классическая математика, неклассическая и постнеклассическая математики могут вполне естественно сосуществовать. Вера в адекватность интерпретации математического формализма и знание характерных черт сложного общественного или физического явления позволяет предвосхищать математические истины, не доступные чистой интуиции. Можно ли в таком контексте говорить о том, что вера тоже является «применением разума»? Однако если разум присутствует в самом «акте веры», то почему тогда мы противопоставляем разум и веру. Наконец, можно спросить: «Нужна ли вера в математике для гуманитариев, может быть всегда достаточно одного разума?» Прежде всего, заметим, что, как и большинство применяемых в философско-математическом дискурсе понятий, понятие «разума» является нестрогим, расплывчатым и даже туманным. Это, в свою очередь, усиливает неопределенность противопоставления «разум – вера».

При противопоставлении надо стремиться определять понятия таким образом, чтобы они не перекрывали друг друга. Поэтому, с точки зрения математического и естественнонаучного образования, разум чаще всего отождествляют с рациональностью, а веру – с иррациональностью. Здесь есть сходство с хорошо известной житейской ситуацией: «Истина всегда находится между двух огней – женских чувств и мужской логики». Хотя и без того и другого в жизни не обойтись, это все тоже противопоставление интуитивного и логического. И как бы университетские преподаватели математики, работающие на философских и социально-гуманитарных факультетах, ни относились к соотношению интуитивного и логического, эти компоненты любого творчества необходимы в процессе математического и гуманитарного познания. Заметим, что условная граница между интуитивным и формальным познанием проходит не только между математической и гуманитарными науками, но непосредственно и в философии самой математики. Существуют определенные границы их применения. Особенно остро вопрос о границах применимости математики встал в прошлом веке в связи с проблемой обоснования математики, а также кризисом физики и последовавшим за этими событиями философским «смятением умов».

После тщетных попыток поиска универсального формализма математики опыт осмысления оснований математики в XX веке привел к выводу, что традиционная трактовка математики слишком идеализирована. С присущим им критицизмом, математики совместно с логиками выявили шаткость теоретико-множественных оснований математики, что еще раз свидетельствует об их исключительной интеллектуальной смелости и самокритичности. Чтобы понять, как это отражается на математическом образовании, сошлемся на высказывание университетского преподавателя Патрисии Кросс: «*Загадка блестящего учителя – стимулировать «очевидно обыкновенных» людей на приложение необыкновенных усилий. Важнейшая проблема не в выявлении победителей, а в выращивании победителей из заурядных людей*». С воспитательной точки зрения полезно показать место общей математики в мировоззренческой культуре гуманитарного знания, для чего можно и нужно использовать философско-математический дискурс, опираясь на математическое и философское содержание полноценного гуманитарного университетского образования. Характерной особенностью философско-математического мышления является то, что оно относит себя не к объекту, а к субъекту мышления.

Границы логического обоснования математики, определенные философией логики, не способны сегодня четко отделить теоретическую математику от математики, которая все же требует методологического обоснования. Постгёделевская философия математики вполне обоснованно поставила под сомнение классический образ математики как строго обоснованной науки. Философы науки вполне резонно обращают внимание на то, что излишне педантичное сосредоточение исключительно на истинности предложений, суждений и утверждений иногда чревато потерей ценности самой истины, что особенно актуально в преподавании «математики для нематематиков». Мы должны уяснить для себя – понимаем ли мы в чем ценность математической истинности для гуманитариев или последние просто любят ее вообще, не пытаясь при этом выявить уровни обоснованности предложений-утверждений для признания их истинными. Это подобно неразрешимой дилемме для мужчин: «Выбирайте: либо любить женщин, либо понимать их». Ведь большинству хочется и того и другого. Возвращаясь к математическому образованию, заметим, что может быть мы скорее поймем, в чем же заключается истинность предложения-утверждения для гуманитария, когда мы поймем в чем заключается для них ценность математической истины.

Основные гуманитарно-математические трудности связаны с тем, что акт математического познания, наиболее интересный с философской точки зрения, использует не только интуитивно ясную бесконечность счетного типа, но и бесконечность типа континуума, предполагающую наличие иррациональной или интуитивной компоненты в человеческом познании. Современный взгляд, формируемый неклассической философией математики и математической практикой, состоит в том, что сущность бесконечности заключается не только в традиционных философских понятиях актуальности и потенциальности, но и в таких дополнительных понятиях, как ее неоднозначность и нечеткость, что сближает ее с объектами гуманитарного знания. К сожалению, математические журналы, в том числе по проблемам дидактики математики, не публикуют статьи, авторы которых рассказывали бы об истории и процессе получения профессионально ориентированных результатов, делая акцент только на положительных выводах. По существу, это незатронутый социологический аспект современной математической образовательной практики, связанный, прежде всего, с идеалом математики, традиционно культивируемым в различных направлениях философии и методологии науки.

* * *

С точки зрения неклассического подхода в философии науки, учитывающего соотнесенность характеристик объекта и средств познания, используемых субъектом, математическая теория не рассматривается больше как отражение реальности один к одному, а как некоторая идеализация, рационализация и даже упрощение. Поэтому основная черта неклассической методологии – это рефлексия над методом. В начале 30-х годов XX века, благодаря работам самих математиков после ошеломляющих гёделевских результатов произошло расщепление математического бытия и математического сознания, которое возможно создало предпосылки для противоположения в математическом познании субъекта и объекта, а также для наступления рефлексии математического познания и возникновения подлинной философии математики. Как естественное следствие этого возникавшие в теоретической математике противоречия перестали считать «онтологическими противоречиями бытия», поскольку стало ясно, что они являлись результатом самой человеческой деятельности, создавшей эти странные противоречия.

Философы-гуманитарии считают, что современное методологическое мышление формалистично и не объясняет исторической устойчивости математических теорий. Этому есть вполне естественное объяснение, так как методологическая привычка математиков использовать в своих рассуждениях аксиоматический формализм отличается от традиционных интуитивных представлений гуманитариев. Для хорошего восприятия объектов математических моделей принято наделять их интуитивным содержанием. Заметим, что в математической модели нередко присутствуют неявные посылки, которые математики стараются сделать явными, то есть описать их в качестве аксиом. Поэтому если интуитивные представления не трансформируются в утверждения, описывающие реальность, то тогда, очень трудно выйти за границы и пределы формализма. Тем не менее, к достоинствам хорошо формализованной математической теории можно отнести то, что она может подготовить новую интуицию на более высоком абстрактном уровне и даже направит ее, но, к сожалению, не может заменить ее. Однако выявление истоков непротиворечивости современной математики, лежащих в основе ее структурной устойчивости, требует философского проникновения в онтологическую сущность математических понятий и выбранной логики рассуждений.

Во второй половине прошлого века такие направления в математике, как конструктивизм, теория сложности вычислений и фрактальная геометрия обозначили изменения в стилях математического мышления, признав принципиальную неполноту знаний. Поскольку математика неполна, а языком естественных наук является математика, то, например, в физике всегда будут существовать неподвластные нам истинные утверждения, поэтому не может быть и «теории всего». Теорема Гёделя о неполноте убила мечту древних греков о том, чтобы все истинные утверждения в математике были доказаны, что делает невозможным создание теории всего. Говоря о неполноте в философско-математическом образовании, заметим, что любая образовательная система может стать полной, когда она ограничена совместимыми участниками образовательного процесса. Строго говоря, понять является ли некоторая теория, в том числе и в образовательных системах, полной или нет, в силу теоремы неполноте, невозможно без обсуждения метафизического вопроса о том, что такое хорошее современное образование. Принцип неопределенности в образовании предполагает, что существует неустранимое ограничение на количество двусторонней информации в образовательном тандеме «учитель – ученик».

Последнее обусловлено, прежде всего, тем, что так называемый «принцип неопределенности философско-математического образования» не настаивает на необходимости наличия причинно-следственных компонентов в образовательном процессе, а лишь предполагает их существование в нашей гипотетической модели образования. Более того, университетские педагоги-практики не всегда осознают то, что любое утверждение относительно состояния образовательной модели, в контексте принципа неопределенности в образовании, например, с точки зрения философа науки Карла Поппера, выглядит как ненаучное утверждение, поскольку является экспериментально не фальсифицируемым пусть даже с помощью «идеально» обоснованного диссертационного эксперимента. Учитывая границы, налагаемые на рациональное знание теоремой неполноты и принципом неопределенности, маловероятно, что можно будет достигнуть абсолютного научного знания исключительно математическими и естественнонаучными методами. В этом тоже есть своя польза, так как философско-методологические барьеры современной науки и университетского образования в свою очередь обогащают математическое знание и методические образовательные приемы, выявляя неустранимую роль человеческого фактора в фундаментальном знании и университетском образовании.

* * *

Если предположить, что формальные идеализации современной математики отражают не вневременную природу математического знания, а естественным образом исторически сложившиеся идеалы, нормы и ценности этой науки, то в таком случае разделительная грань между математикой и философией, а также между математикой и гуманитарным знанием, начинает стираться. Математика в этом смысле становится похожей на другие нематематические дисциплины. Похожей в том смысле, что математика, как и все другие научные дисциплины, которые следует преподавать в университете, занимается поиском ответов на вопросы, поставленные общественной и экономической жизнью. Даже многие выдающиеся математики говорили о математике, как о гуманитарной науке, созданной трудами человека. В таком необычном контексте формальные аспекты математического познания – это именно те аспекты, которые целиком подчинены движущей силе мысли, хотя они редко в глазах гуманитариев становятся источником этой силы. Их главная методологическая задача состоит в том, чтобы «вести идею» и не создавать ненужных помех в процессе ее развития и созревания.

Современный этап развития математики характеризуется тем, что математики строят не произвольную, ничем не ограниченную, абстрактно-формальную математику, а «понимаемую математику», понимаемую в том смысле, что философы математики понимают, какие ограничения это понимание накладывает на ее логические основания. Возможно поэтому, или по каким-то иным причинам, в настоящее время снова ведется оживленная дискуссия о проблемах, возникающих на стыке науки, философии и религии. Но если в контексте понимаемой математики сознательно использовать тринитарный стандарт мышления, то многие проблемы традиционной логики противоположностей, исключающей, а не ищущей третье, станут для нас более понятными и в философско-гуманитарном познании. Математическая составляющая философского и социально-гуманитарного образования доставляет удовольствие от неожиданности и точности состояний плохо формализуемых ситуаций. Именно точность здесь главное слово, за которым виден ум исследователя, которым так гордятся «виртуозы разума».

Временная протяженность любого фундаментального образовательного пространства дуалистически-противоречивое понятие – оно может быть «длиною в жизнь», а может оказаться всего лишь неубедительной имитацией профессионального философско-математического образования. Пока мы чаще всего принимаем одно за другое.

Двойственность философско-математического дискурса проявляется иногда в виде логичных и последовательных рассуждений, что в целом хорошо, но также и в виде конъюнктурных и непоследовательных метаний в разные стороны, что методологически не очень хорошо[3]. В соответствии с законом американского физика Дагласа Хофштадтера: «*На любое дело требуется больше времени, чем казалось в начале, даже если вы учитывали при этом закон Хофштадтера*». Как правило, настоящее временит наше будущее. Возможно поэтому, преподавательская печаль, постоянно сопутствующая нашей профессии, никогда не покидает ни математиков, ни философов, ни всех неравнодушных людей, косвенно ответственных за состояние и уровень фундаментального университетского образования.

В. А. Еровенко,
профессор, зав. кафедрой
общей математики и информатики БГУ

---

[3] См., например, следующую литературу по философии и истории математики:

1. Бычков, С.Н. Математика в мировой культуре: Учебное пособие / С.Н. Бычков, Е.А. Зайцев. – М.: РГГУ, 2006. – 228 с.
2. Каганов, М.И. Абстракция в математике и физике / М.И. Каганов, Г.Я. Любарский. – М.: Физматлит, 2005. – 352 с.
3. Казарян, В.П. Математика и культура / В.П. Казарян, Т.П. Лолаев. – М.: Научный мир, 2004. – 288 с.
4. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – 2-е изд. – М.: РИМИС, 2007. – 640 с.
5. Михайлова, Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2008. – 332 с.
6. Мороз, В.В. Философско-математический синтез: опыт историко-математической рефлексии / В.В. Мороз. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 307 с.
7. Панов, В.Ф. Математика древняя и юная / В.Ф. Панов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.
8. Паршин, А.Н. Путь. Математика и другие миры / А.Н. Паршин. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.
9. Перминов, В.Я. Философия и основания математики / В.Я. Перминов. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.
10. Петров, Ю.П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика / Ю.П. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 448 с.
11. Филинова, О.Е. Математика в истории мировой культуры: учебное пособие / О.Е. Филинова. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 224 с.
12. Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа / Г. Фреге. – Томск: Водолей, 2000. – 128 с.
13. Харди, Г. Апология математики / Г. Харди. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. – 104 с.
14. Хофштадтер, Д. Гёдель, Эшер, Бах: Эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. – Самара: Бахрах-М, 2001. – 752 с.
15. Штейнгауз, Г. Математика – посредник между духом и материей / Г. Штейнгауз. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 351 с.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Болтянский, В.Г. Беседы о математике / В.Г. Болтянский, А.П. Савин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. – 368 с.

2. Дорофеева, А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности: Учебное пособие для вузов / А.В. Дорофеева. – 2-е изд. и доп. – М.: Дрофа, 2003. – 384 с.

3. Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.

4. Жолков, С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев: Учебник / С.Ю. Жолков. – М.: Гардарини, 2002. – 531 с.

5. Шикин, Е.В. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: Учебник / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. – 2-е изд. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 272 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. Вентцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

7. Воронов, М.В. Математика для студентов гуманитарных факультетах / М.В. Воронов, Г.П. Мещерякова. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 384 с.

8. Гаврилов, Г.П. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: учебное пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1992. – 408 с.

9. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – 7-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 405 с.

10. Солодовников, А.С. Теория вероятностей: учебное пособие для студентов пед. вузов по спец. математика / А.С. Солодовников. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Вербум-М, 1999. – 208 с.

СПЕЦИАЛЬНАЯ

11. Виленкин, Н.Я Рассказы о множествах /.Н.Я. Виленкин. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – 162 с.

12. Данциг, Т. Числа – язык науки / Т. Данциг. – М.: Техносфера, 2008. – 304 с.

13. Купиллари, А. Математика – это просто! Доказательство / А. Купиллари. – М.: Техносфера, 2006. – 304 с.

14. Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 568 с.

15. Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас / Г. Фрейденталь. – М.: Мир, 1977. – 261 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ