СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.О. Цуканова

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
shugaray@mail.ru

Рассмотрим задачу Коши для стохастического операторного интегро-дифференциального уравнения нейтрального типа вида

$$d\Bigl(u+\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,x,u(\alpha(t)),\xi)\,d\xi\Bigr)=(\Delta_x u+f(t,u(\alpha(t)),x))\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\sigma(t,u(\alpha(t)),x)e_n(x)\,d\beta_n(t),$$

$$0<t\leqslant T,\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad T>0,$$

$$u(t)=\phi(t),\quad -r\leqslant t\leqslant 0,\quad r>0,$$

с монотонной непрерывно дифференцируемой функцией запаздывания $\alpha:[0,+\infty)\to\to[-r,+\infty)$ такой, что $\alpha(0)=-r$ и $-r\leqslant\alpha(t)\leqslant t$. Здесь $\Delta_x=\sum_{j=1}^d\partial^2_{x_j}$, $d\in\{1,2,\dots\}$, — d-мерный оператор Лапласа, $\partial^2_{x_j}\equiv\partial^2/\partial x_j^2$, $j\in\{1,2,\dots,d\}$, $\{\beta_n(t),\ t\geqslant 0,\ n\in\{1,2,\dots\}\}\subset\subset\mathbb{R}$ — одномерные броуновские движения, последовательность $\{\lambda_n, n\in\{1,2,\dots\}\}\subset\mathbb{R}$ такая, что $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ сходится, а вектора $\{e_n(x),x\in\mathbb{R}^d,n\in\{1,2,\dots\dots\}\}$ такие, что существует постоянная $c>0$, с которой $\sup\limits_{n\in\{1,2,\dots\}}\ \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}|e_n(x)|\leqslant c$.

Известно, что оператор $A=\Delta_x$ является (инфинитезимальным) генератором (C_0)-полугруппы $\{S(t):L_2^\rho(\mathbb{R}^d)\to L_2^\rho(\mathbb{R}^d),\ t\geqslant 0\}$, порождающим ее по правилу $(S(t)u)(x)==\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)u(\xi)\,d\xi$, где $\mathcal{K}(t,x)=(4\pi t)^{-d/2}\exp\{-|x|^2/(4t)\}$ — ядро оператора A, $L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$ — весовое гильбертово пространство со скалярным произведением $(f,g)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)g(x)\rho(x)\,dx$ и порождаемой им нормой $\|f\|_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}=\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\rho(x)\,dx}$, причем относительно веса $\rho\in\in L_1(\mathbb{R}^d)$ предполагается, что он ограничен и что существует константа $C_\rho(T)>0$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)\rho(x)\,dx\leqslant C_\rho(T)\rho(\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\xi\in\mathbb{R}^d$.

Пусть начальные данные $\phi:[-r,0]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — это такая функция, для которой $\mathbb{E}\sup\limits_{-r\leqslant t\leqslant 0}\|\phi(t)\|_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}=\mathbb{E}\sup\limits_{-r\leqslant t\leqslant 0}\int_{\mathbb{R}^d}|\phi(t,x)|^2\rho(x)\,dx<+\infty$, $\{f,\sigma\}:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ и $b:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ — измеримые функции, а процесс $u:[-r,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ является решением интегрального уравнения

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)\Bigl(\phi(0)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,\xi,\phi(-r),\zeta)\,d\zeta\Bigr)\,d\xi-\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(t,x,u(\alpha(t)),\xi)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t\Delta_x\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(s,\xi,u(\alpha(s)),\zeta)\,d\zeta\Bigr)\,d\xi\Bigr)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)f(s,u(\alpha(s)),\xi)\,d\xi\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\sigma(s,u(\alpha(s)),\xi)e_n(\xi)\,d\xi\Bigr)d\beta_n(s),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad x\in\mathbb{R}^d,\qquad(1)$$

с начальными данными

$$u(t,x)=\phi(t,x),\quad -r\leqslant t\leqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad r>0,\qquad(2)$$

для которого справедливо условие

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\,dt < +\infty. \tag{3}$$

Измеримый непрерывный стохастический случайный процесс $u:\ [-r,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, записываемый в форме (1) и удовлетворяющий условиям (2) и (3), называется *мягким решением* рассматриваемой задачи. Обозначим с помощью $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$ банахово пространство непрерывных по t для почти всех $\omega\in\Omega$ процессов $\Phi:\ [0,T]\times\Omega\to L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$ с нормой

$$\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{2,T,\rho}} = \left(\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Phi(t,\omega)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2} \equiv \left(\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Phi(t)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)^2.$$

Доказан следующий результат, сформулированный в виде теоремы, касающийся существования и единственности мягкого решения рассматриваемой задачи Коши в пространстве $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$.

Теорема (о существовании и единственности мягкого решения). *Пусть функции* $\{f,\sigma\}$: $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *такие, что существует постоянная* $L>0$, *независящая от* (t,x), *с которой выполняются условие линейного роста и условие Липшица по второму аргументу вида*

$$f^2(t,u,x)+\sigma^2(t,u,x)\leqslant L^2(1+u^2),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \{u,v\}\subset\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

$$(f(t,u,x)-f(t,v,x))^2+(\sigma(t,u,x)-\sigma(t,v,x))^2\leqslant L^2(u-v)^2,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \{u,v\}\subset\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

функция $b:\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *такая, что* $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} b(t,0,0,\cdot)\rho^{-1/2}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *и для нее выполняется условие Липшица по третьему аргументу вида*

$$|b(t,x,u,\xi)-b(t,x,v,\xi)|\leqslant l(t,x,\xi)|u-v|,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \{u,v\}\subset\mathbb{R},\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^d,$$

с функцией $l:\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[0,+\infty)$ *такой, что*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)\,dx<+\infty,$$

а для функции $a\partial_x b$ *существует мажорирующая функция* $\varphi:\ [0,T]\times\mathbb{R}^d\to[0,+\infty)$ *такая, что* $|\partial_x b(t,x,u,\cdot)|\leqslant\varphi(t,\cdot)|u|$, $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbb{R}^d$, *причем* $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\varphi(t,\cdot)\rho^{-1/2}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$. *Тогда, если выполняется условие*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)\,dx<\frac{1}{4},$$

то у рассматриваемой начальной задачи существует единственное на $0\leqslant t\leqslant T$ *мягкое решение* $u\in\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$.

В идее доказательства, взятой из работы [1], лежит проверка выполнения условия классической теоремы Банаха о сжимающем отображении (принципа Пикара — Банаха для неподвижной точки) для оператора $\Psi:\ \mathfrak{B}_{2,T,\rho}\to\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$, действие которого задается правилом

$$\Psi(u)(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)\left(\phi(0)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,\xi,\phi(-r),\zeta)\,d\zeta\right)d\xi-\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(t,x,u(\alpha(t)),\xi)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t \Delta_x\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(s,\xi,u(\alpha(s)),\zeta)\,d\zeta\bigg)d\xi\bigg)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)f(s,u(\alpha(s)),\xi)\,d\xi\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\sigma(s,u(\alpha(s)),\xi)e_n(\xi)\,d\xi\bigg)d\beta_n(s).$$

Для данного оператора доказано, что $\Psi(\mathfrak{B}_{2,T,\rho})\in\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$, и выведено условие сжатия вида

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T,\rho}}\leqslant 4\bigg(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\bigg)\rho(x)\,dx+$$

$$+d^2C^2\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{d\xi}{|x-\xi|^{d+1-2\mu}}\bigg)^2\frac{T^{2-2\mu}}{(1-\mu)^2}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)\,dx\bigg)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi^2(t,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta+L^2C_\rho(T)T^2+$$

$$+L^2c^2\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\bigg)C_\rho(T)T\big)\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T,\rho}},\quad \frac{1}{2}<\mu<1,\quad C=\mathrm{const},$$

которое означает, что этот оператор, определенный в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$, имеет единственную неподвижную точку — решение $u\in\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$ уравнения $\Psi(u)=u$, которое, очевидно, представимо в так называемой «мягкой» форме (1) и удовлетворяет условиям (2), (3) — т. е. мягкое решение из пространства $\mathfrak{B}_{2,T,\rho}$ рассматриваемой задачи Коши.

Литература

1. Samoilenko A. M., Mahmudov N. I., Stanzhitskii A. N. *Existance, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces* // Dynamic Systems and Applications. 2008. V. 17. P. 53–70.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

О.Л. Яблонский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
yablonski@bsu.by

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\mathrm{d}X(t)=f(X(t))\,\mathrm{d}L(t),\quad t\in T,\tag{1}$$

с начальным условием $X(0)=x^0$, где L — квадратично интегрируемый процесс Леви.

В докладе будет изучается уравнение (1) в алгебре обобщенных случайных процессов (см., например, [1]). Согласно такому подходу уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши следующего вида

$$\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{X}(\widetilde{t})=\widetilde{f}(\widetilde{X}(\widetilde{t}))\,\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{L}(\widetilde{t}),\quad \widetilde{X}(\widetilde{t})|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})}=\widetilde{X}^0(\widetilde{t}).\tag{2}$$

Переписав задачу (2) при помощи представителей обобщенных процессов получим следующую конечно-разностную задачу

$$X_n(t+h_n)-X_n(t)=f_n(X_n(t))(L_n(t+h_n)-L_n(t)),\quad X_n|_{t\in[0,h_n)}=X_n^0.\tag{3}$$