Литература

1. Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде.* М.: Мир, 1986.
2. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. 2006. V. 23. № 2. C. 193–220.
3. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite — Padé Approximants to* e^z // J. Approx. Theory. 1997. V. 90. № 2. C. 283–298.
4. Герман А. В., Кечко Е. П., Старовойтов А. П. *О нулях многочленов Эрмита* // Изв. Гомельского гос. ун-та. им. Ф. Скорины. 2015. № 3(90). С. 104–110.

О РАСЧЕТАХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СИЛЬНОЙ СТАДИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

В.Б. Таранчук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
taranchuk@bsu.by

Задача о сильной стадии точечного взрыва в случае совершенного газа с постоянным показателем адиабаты имеет автомодельное решение [1–3], так как в начальной фазе взрыва давление невозмущенного газа пренебрежимо мало по сравнению с давлением на фронте ударной волны.

Уравнения, описывающие автомодельные решения, вытекают из уравнений газовой динамики. В результате применения преобразования подобия и с учетом условий Ренкина — Гюгонио в [3] получена и приводится следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)RU'+\frac{\gamma-1}{2}P'-\frac{\nu(\gamma+1)}{4}UR=0, \tag{1}$$

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)R'+\left(U'+\frac{\nu-1}{\lambda}U\right)R=0, \tag{2}$$

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)P'+\gamma\left(U'+\frac{\nu-1}{\lambda}U\right)P-\frac{\gamma+1}{2}\nu P=0, \tag{3}$$

где $\nu=1,2,3$ для всех случаев пространственной симметрии; безразмерные величины скорости, давления и плотности: $U=u/u_2$, $P=p/p_2$, $R=\rho/\rho_2$; u, p, ρ — компонента вектора скорости, давление и плотность; u_2, p_2, ρ_2 — эти же величины на фронте ударной волны.

Разрешая систему (1)–(3) относительно производных, получаем систему

$$U'=\frac{\tau\nu P-\gamma\alpha UP/\lambda-\nu\tau\omega UR(U-\tau\lambda)}{\gamma P-2\omega R(U-\tau\lambda)^2}, \tag{4}$$

$$R'=-\frac{(U'+\alpha U/\lambda)R}{U-\tau\lambda}, \tag{5}$$

$$P'=\frac{\tau\nu P-\gamma(U'+\alpha U/\lambda)P}{U-\tau\lambda}, \tag{6}$$

где $\alpha=(\gamma-1)$, $\tau=(\gamma+1)/2$, $\omega=(\gamma-1)^{-1}$.

Решение задачи предполагает, что нужно проинтегрировать систему уравнений (4)–(6) на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ с граничными условиями при $\lambda = 1$ (на ударной волне):

$$U(1) = 1, \quad P(1) = 1, \quad R(1) = 1. \tag{7}$$

Следует отметить, что при $\lambda = 0$ в центре симметрии должно быть $U = 0$.

Систему (4)–(6) с условиями (7) обычно интегрировали (см. [4]) численно по методу Рунге — Кутта четвертого порядка точности с постоянным шагом $\Delta\lambda$. Численные расчеты для разных γ с шагом $\Delta\lambda$ от 10^{-4} до $\Delta\lambda \sim 0.1$ дают по U и P погрешность не превышающую 1%. Но вот относительная погрешность определения R заметно возрастает с ростом шага интегрирования. Объяснением этого является следующее свойство системы — точка $\lambda = 0$ является особой точкой неустойчивого типа (тип поведения фазовых траекторий — седло), именно это требует при численных расчетах очень маленького шага.

Отметим другой подход получения решений, основанный на использовании интегралов системы (1)–(3).

В [3] показано, что для рассматриваемой системы имеют место интеграл масс и адиабатичности, интеграл энергии. В принятых автомодельных переменных их можно записать следующим образом:

интеграл масс и адиабатичности

$$2\omega\left(\tau - \frac{U}{\lambda}\right)P\lambda^{\nu} = R^{\gamma-1}, \tag{8}$$

интеграл энергии

$$\gamma P\left(\frac{U}{\lambda} - \frac{\tau}{\gamma}\right) = RU^2\left(\tau - \frac{U}{\lambda}\right). \tag{9}$$

Тогда, используя (9), из (4) можно получить однородное дифференциальное уравнение

$$U' = -\frac{U}{\lambda}\,\frac{(\nu-1)\alpha\gamma\varphi(U/\lambda)^2 - \nu/2(2\gamma-1)(U/\lambda) + \tau\nu/2}{\gamma(U/\lambda)^2 - 2\tau U/\lambda + \tau}, \tag{10}$$

где $\varphi = (\gamma+1)^{-1}$.

Решение автомодельной задачи о сильном взрыве было получено в замкнутой параметрической форме в [2]. Но следует отметить, что в таком подходе, например, составление соответствующих таблиц решений требует расчета системы трех трансцендентных уравнений.

Значительно более эффективным является расчет системы (10), (5), (6) с условиями (7). Уравнение (10) можно интегрировать численно, причем не обязательно с очень малым шагом, так как для его имеем устойчивую особую точку, вследствие чего численное интегрирование достаточно точно в любой окрестности $\lambda = 0$. Также можно применять системы компьютерной алгебры (см. [5]), например, Wolfram *Mathematica*.

Литература

1. Седов Л. И. *Распространение сильных взрывных волн* // Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. №2. С. 241–250.

2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. *Теория точечного взрыва.* М.: Физматгиз, 1961.

3. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. *Точечный взрыв. (Методы расчета. Таблицы).* М.: Наука, 1974.

4. Taylor G. I. *The formation of a blast wave by a very intense exposion* // Proc. Roy. Soc., 1950. Vol. A 201, № A 1065. P. 159–186.

5. Таранчук В. Б. *Основные функции систем компьютерной алгебры* : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики. Мн.: БГУ, 2013.