функции $\Delta p(z)$ по базису из модифицированных функций Лагерра, что оказалось достаточным для получения приближенного решения с точностью, достаточной для проведения практических расчетов. В то же время затраты машинного времени на расчет распределений ННЗ по глубине с использованием модифицированного МНК были порядка единиц секунд, а метода Галеркина — на один-полтора порядка больше — это позволяет говорить, что для рассмотренной задачи наибольшей вычислительной эффективностью обладает модифицированный МНК.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (базовая часть государственного задания № 340/2015, проект № 1416), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-03-00903), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14-42-03062).

Литература

1. Михеев Н. Н., Никоноров И. М., Петров В. И., Степович М. А. *Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолюминесценции* // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1990. Т. 54, № 2. С. 274–280.

2. Степович М. А. *К оптимизации измерений диффузионной длины прямозонных полупроводниковых материалов катодолюминесцентным методом* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2000. № 5. С. 69–74.

3. Лапин С. В., Егупов Н. Д. *Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления.* М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 496 с.

4. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. *Модифицированная проекционная схема метода наименьших квадратов для моделирования концентрации неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах* // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1, № 3. С. 354–358.

5. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. *Модифицированная модель диффузии неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах* // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1, № 5. С. 544–547.

6. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. *О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11. С. 65–69.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, математический факультет, Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита — Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}), \quad z \to 0.$$

Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называют *диагональными аппроксимациями Эрмита — Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$.

Многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^k$ были введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвященной доказательству трансцендентности числа e и имеют важные приложения к диофантовым приближениям и приближениям аналитических функций. Известно, что они образуют ортогональную ситему относительно весовых функций, определяемых через систему экспонент, и, в некоторых частных случаях, являются решением дифференциальных уравнений второго порядка.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A^p_{n_p}(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна (см. [1, 2]).

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *— произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $k \geqslant 1$ *нули многочлена* $A^p_{n_p}(z)$, $0 \leqslant p \leqslant k$, *находятся в круге* $\{z : |z| < R^p_{n_p}\}$, *где*

$$R^p_{n_p} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}. \tag{1}$$

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$ и $k = 1$ многочлены Эрмита совпадают с классическими многочленами Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$. Из теоремы следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с «теоремой о кольце» Э. Саффа и Р. Варги (см. [1]).

Если $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, и $k \geqslant 2$, то в качестве следствия теоремы вытекает теорема 2.2 из работы [3]: *все нули диагональной аппроксимации Эрмита – Паде I типа* $A^p_n(z)$ *для системы экспонент* $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$, *лежат в круге* $\{z : |z| < R_p\}$, *где*

$$R_p = 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-p}\frac{1}{j}\right].$$

При тех же предположениях, что и в теореме Ф. Вилонского [3], но для произвольных действительных $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ из (1) следует утверждение, доказанное в [4]: *все нули многочлена* $A^p_n(z)$, *лежат в круге* $\{z : \ |z| < R^p_n\}$, *где*

$$R^p_n = 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{|\lambda_p - \lambda_j|} + \sum_{j=1}^{k-p}\frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|}\right].$$

Теорема утверждает, что нули многочленов $A^p_{n_p}(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R^p_{n_p}$ зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения показателей системы экспонент $\{e^{\lambda_p}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме верхней оценки для модулей нулей $A^p_{n_p}(z)$ в случае, когда набор чисел $\{n_p\}_{p=0}^k$ фиксирован, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1-\varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1+\varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Для этой системы полученные в теореме неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 гг.

Литература

1. Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде.* М.: Мир, 1986.
2. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. 2006. V. 23. № 2. С. 193–220.
3. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite — Padé Approximants to* e^z // J. Approx. Theory. 1997. V. 90. № 2. С. 283–298.
4. Герман А. В., Кечко Е. П., Старовойтов А. П. *О нулях многочленов Эрмита* // Изв. Гомельского гос. ун-та. им. Ф. Скорины. 2015. № 3(90). С. 104–110.

О РАСЧЕТАХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СИЛЬНОЙ СТАДИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

В.Б. Таранчук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
taranchuk@bsu.by

Задача о сильной стадии точечного взрыва в случае совершенного газа с постоянным показателем адиабаты имеет автомодельное решение [1–3], так как в начальной фазе взрыва давление невозмущенного газа пренебрежимо мало по сравнению с давлением на фронте ударной волны.

Уравнения, описывающие автомодельные решения, вытекают из уравнений газовой динамики. В результате применения преобразования подобия и с учетом условий Ренкина — Гюгонио в [3] получена и приводится следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)RU'+\frac{\gamma-1}{2}P'-\frac{\nu(\gamma+1)}{4}UR=0, \tag{1}$$

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)R'+\left(U'+\frac{\nu-1}{\lambda}U\right)R=0, \tag{2}$$

$$\left(U-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)P'+\gamma\left(U'+\frac{\nu-1}{\lambda}U\right)P-\frac{\gamma+1}{2}\nu P=0, \tag{3}$$

где $\nu=1,2,3$ для всех случаев пространственной симметрии; безразмерные величины скорости, давления и плотности: $U=u/u_2$, $P=p/p_2$, $R=\rho/\rho_2$; u, p, ρ — компонента вектора скорости, давление и плотность; u_2, p_2, ρ_2 — эти же величины на фронте ударной волны.

Разрешая систему (1)–(3) относительно производных, получаем систему

$$U'=\frac{\tau\nu P-\gamma\alpha UP/\lambda-\nu\tau\omega UR(U-\tau\lambda)}{\gamma P-2\omega R(U-\tau\lambda)^2}, \tag{4}$$

$$R'=-\frac{(U'+\alpha U/\lambda)R}{U-\tau\lambda}, \tag{5}$$

$$P'=\frac{\tau\nu P-\gamma(U'+\alpha U/\lambda)P}{U-\tau\lambda}, \tag{6}$$

где $\alpha=(\gamma-1)$, $\tau=(\gamma+1)/2$, $\omega=(\gamma-1)^{-1}$.