$\|x\| \leqslant b$, *где* $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ — *положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений включения* (1) *на промежутке* $]-\infty, +\infty[$, *принадлежащих множеству* N_V, *то нулевое решение является глобально асимптотически* (ϖ, ϖ_1)*-устойчивым.*

Теорема 3. *Пусть включение* (1) *удовлетворяет условиям* L), I), II) *и пусть* $0 < s < r$. *Если существует постоянная* $a > 0$ *такая, что включение* (1) *не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$ *на промежутке* $]-\infty, 0]$, *обладающих свойствами:* $x(t) \in n_V$; $E(\|x(t)\|^s) \leqslant a \quad \forall t \in]-\infty, 0]$, *то нулевое решение включения* (1) s*-устойчиво.*

Если, кроме того, существует постоянная $b > 0$, *такая, что включение не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$, *таких, что* $x(t) \in M_V$, $E(\|x(t)\|^s) \leqslant b$ $\forall t \in]-\infty, \infty[$, *то нулевое решение асимптотически* (s, s)*-устойчиво.*

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБРАЩЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В.Л. Розенберг

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

rozen@imm.uran.ru

Задачи реконструкции и оптимального управления в условиях неопределенности занимают значительное место в современной математической теории управления и ее приложениях. В различных интерпретациях они исследовались для многих систем, в том числе описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) и стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). В настоящей работе подходы, разработанные в рамках теории позиционного управления, развитой Н. Н. Красовским и его школой [1], применяются к решению некоторых, специальным образом поставленных, задач динамического обращения и гарантирующего управления при неполной информации для линейного СДУ.

Рассматривается линейное СДУ следующего вида:

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t))\,dt + B_2(t)U_2(t)\,d\xi(t,\omega), \quad x(t_0,\omega) = x_0. \qquad (1)$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k\times k}$)); $f(t)$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n\times 1$, $n\times n$, $n\times r$ и $n\times k$, соответственно. В системе действуют два измеримых управления: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \ldots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \ldots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, которые принимают значения из заданных ресурсов управления S_{u1} и S_{u2}, являющихся выпуклыми компактами. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21}d\xi_1, u_{22}d\xi_2, \ldots, u_{2k}d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k})$ характеризует амплитуду случайных помех.

Решение уравнения (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему стохастический интеграл Ито. При сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями. Отметим, что уравнения типа (1) описывают простейшие линеаризованные модели: изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде, динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов или движения частиц в некотором поле.

Задана непрерывная матричная функция наблюдения $Q(t)$ размерности $q \times n$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0:l]$, поступает информация об N реализациях случайного процесса $x(t)$, причем измерению доступен сигнал

$$y(\tau_i) = Q(\tau_i)x(\tau_i). \tag{2}$$

Полагаем, что возможно получение оценок m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$ таких, что

$$P(\max_{i\in[1:l]}\{\|m_i^N - m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^n}, \|D_i^N - D(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n\times n}}\} \leqslant h(N)) = 1 - g(N), \tag{3}$$

причем $h(N)$ и $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Отметим, что стандартные статистические процедуры построения оценок m_i^N и D_i^N допускают модификации, обеспечивающие выполнение соотношения (3). Опишем две рассматриваемые задачи.

Задача 1 (динамической реконструкции). Предполагается, что в системе действует только одно векторное управление (u_1 или u_2), которое считается внешним (неизвестным) воздействием; его элементы суммируемы с квадратом и имеют ограниченную вариацию на T; начальное состояние x_0 — известный детерминированный или случайный (нормально распределенный) вектор. Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестного входа $u_1(t)$ (или $u_2(t)$), порождающего случайный процесс $x(t)$, по дискретной информации вида (2), причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближения от искомого входа в метрике пространства $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ (или $L_2(T;\mathbb{R}^k)$) должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

Задача 2 (гарантированного позиционного ε-наведения). Предполагается, что заданы выпуклые замкнутые целевые множества $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Начальное состояние x_0 принадлежит конечному множеству допустимых начальных состояний X_0, которое состоит из нормально распределенных случайных величин с числовыми параметрами (m_0, D_0), где $m_0 = Mx_0$ — математическое ожидание, $m_0 \in \mathcal{M}_0 = \{m_0^1, m_0^2, \ldots, m_0^{n_1}\}$, $D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^*$ — ковариационная матрица, $D_0 \in \mathcal{D}_0 = \{D_0^1, D_0^2, \ldots, D_0^{n_2}\}$. Полагаем, что начальное состояние системы содержится в X_0, но является неизвестным. Задача состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую программу управления $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, которая, каково бы ни было начальное состояние x_0 из множества X_0, гарантирует предписанные свойства процесса x в конечный момент ϑ, а именно попадание математического ожидания $m(\vartheta)$ и ковариационной матрицы $D(\vartheta)$ в ε-окрестности целевых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$. В процессе движения искомая программа формируется позиционно (по принципу обратной связи) на основе информации о сигнале (2). В силу специфики оценки (3) требуем, чтобы вероятность искомого события была близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованных с N параметрах алгоритма.

Указанные задачи для СДУ с помощью уравнений метода моментов [2] сводятся к эквивалентным задачам для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Для решения задачи 1 используются идеи теории динамического обращения [3], именно, конструируется конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей. В задаче 2 применяется подход, основанный на методе программных пакетов, суть которого состоит в сведении задачи гарантирующего управления, поставленной в классе позиционных стратегий, к эквивалентной задаче в классе пакетов программ, представляющих собой семейства программных управлений, параметризованные допустимыми начальными состояниями и обладающие свойством неупреждаемости по отношению к динамике наблюдений [4]. Для задач 1, 2 выписываются конструктивные критерии разрешимости, доказываются утверждения о сходимости алгоритмов с указанием их точности относительно количества доступных измерению реализаций, приводятся численные примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-8.

Литература

1. Красовский Н. Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* М.: Наука, 1985.

2. Пугачев В. С., Синицын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы.* М.: Наука, 1990.

3. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* London: Gordon and Breach, 1995.

4. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. *О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем* // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Е.В. Серегина[1], М.А. Степович[2,3], А.М. Макаренков[1]

[1] Калужский филиал Московского государственного технического ун-та им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия
evfs@yandex.ru, amm2005@rambler.ru

[2] Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, Калуга, Россия

[3] Ивановский филиал Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, Иваново, Россия
m.stepovich@rambler.ru

Изложены результаты использования модифицированных проекционных методов наименьших квадратов (МНК) и Галеркина для решения стохастического обыкновенного дифференциального уравнения тепломассопереноса. Расчеты проведены для диффузии неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в однородном полупроводниковом материале.

Рассмотрено дифференциальное уравнение

$$D\,\frac{d^2\Delta p(z)}{dz^2}-\frac{\Delta p(z)}{\tau}=-\rho(z) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D\,\frac{d\Delta p(z)}{dz}|_{z=0}=v_s\Delta p(0),\quad \Delta p(\infty)=0. \tag{2}$$

Здесь функция $\Delta p(z)$ описывает искомое распределение ННЗ по глубине в мишени в результате их диффузии; z — координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь полупроводника; D, τ и v_s — случайные коэффициенты диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно; $\rho(z)$ — число ННЗ, генерированных вследствие внешнего воздействия в единицу времени в тонком слое мишени на глубине z [1, 2]. Для нахождения приближенного решения уравнения (1), (2) посредством реализации проекционного МНК, основанного на теории матричных операторов [3], был выбран базис из модифицированных функций Лагерра с параметром, ускоряющим сходимость ряда (см. [4–6]). При выполнении расчетов на персональной ЭВМ для параметров, характерных для широкого класса полупроводниковых материалов, удерживалось 12 членов в разложении