Обратимся теперь к физическому смыслу задачи. Движение тела в околоземном пространстве моделируется следующим стохастическим дифференциальным уравнением [1, 2]:

$$m(t)\dot{V}(t) = m(t)g + P(t) + Q(t) + \dot{B}(t,\omega). \qquad (1)$$

где m — масса тела, она зависит от времени t; g — ускорение свободного падения; V — скорость тела; P — сила тяги двигателя; Q — сила сопротивления воздуха, B — процесс броуновского движения.

При исследовании задачи Коши для уравнения (1) задействована методика из статьи [3]. В докладе предполагается обсудить этот подход.

Литература

1. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. *Импульсные процессы. Модели и приложения.* М.: Наука, 1991.
2. Розанов Ю. А. *Случайные процессы.* М.: Наука, 1975.
3. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Стемковская Т. В. *Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов* // ТВП. 1998. Т. 43. № 2. С. 272—293.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

А.А. Леваков

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
levakov@tut.by

Пусть заданы ограниченные полунепрерывные сверху многозначные отображения $F : R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$, $G : R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times d})$, $0 \in F(0)$, $0 \in G(0)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(x(t))\,dt + G(x(t))\,dW(t). \qquad (1)$$

Построим многозначное отображение $x \to A(x) = \{bb^\top \mid b \in G(x)\}$ и введем определение слабого решения включения (1) на промежутке $]-\infty,+\infty[$ (на промежутке $]-\infty,0]$).

Определение 1. Если непрерывный на промежутке $t \in]-\infty,+\infty[$ (на промежутке $t \in$ $\in]-\infty,0]$) процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, удовлетворяет условиям:

1) для каждого $t_0 \in]-\infty,0]$ существуют расширение $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}},\tilde{P})$ пространства $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ и поток $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$, $t \in [t_0,+\infty[$, на этом расширении такие, что на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}},\tilde{P})$ с $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$ и на промежутке $[t_0,+\infty[$ $([t_0,0])$ можно определить $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$-броуновское движение $W_{t_0}(t)$ с $W(t_0)=0$ п. н.;

2) существуют процессы $v \in L_1^{\mathrm{loc}}$ и $u \in L_2^{\mathrm{loc}}$, которые для $(\mu\times\tilde{P})$-почти всех $(t,\omega) \in$ $\in]-\infty,+\infty[\times\tilde{\Omega}$ $((t,\omega) \in]-\infty,0]\times\tilde{\Omega})$ удовлетворяют включениям

$$v(t,\omega) \in F(x(t,\omega)), \quad u(t,\omega)u^\top(t,\omega) \in A(x(t,\omega)),$$

где L_i^{loc} — множество всех измеримых $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$-согласованных процессов $\psi(t)$, $t \in]-\infty,+\infty[$, таких, что для каждого $t_2 > t_1$ (для каждого t_2, $t_1 < t_2 \leqslant 0$) $\int_{t_1}^{t_2} \|\psi(s,\omega)\|^i\,ds < \infty$ п. н., $i \in \{1,2\}$;

3) с вероятностью 1 для всех $t \in [t_0,+\infty[$ $(t \in [t_0,0])$ имеет место равенство

$$x(t) = x(0) + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,dW_{t_0}(s),$$

то $x(t)$ называем слабым решением включения (1) на промежутке $]-\infty,+\infty[$ (на промежутке $]-\infty,0]$).

Для формулировки результатов введем следующие условия.

Условие *L*). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V: R^d \to \to R_+$ такая, что $\forall x \in R^d$

$$DV(x) = \sup_{b\in F(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} b + \sup_{a\in A(x)} \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} aa\right) \leqslant 0.$$

Положим

$$N_V = \{x \in R^d \mid DV(x) = 0\}, \quad n_V = \{x \in R^d \mid V(x) = 0\}.$$

Скажем, что слабое решение $x(t)$ на промежутке $]-\infty,+\infty[$ (на промежутке $]-\infty,0]$) принадлежит множеству N_V (множеству n_V), если $\forall t_0 \in]-\infty,0]$ имеет место равенство

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} v(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2}\, u(t)u^\top(t)\right) = 0$$

для $(\mu\times\tilde{P})$-почти всех $(t,\omega) \in [t_0,+\infty[\times\tilde{\Omega}$ $\big($ при каждом $t \in]-\infty,0]$ выполняется равенство $n_V(x(t)) = 0$ для $(\tilde{P})$-почти всех $\omega \in \tilde{\Omega}.$ $\big)$.

Условие *I*). Существуют постоянные $r > 1$, $\sigma > 0$ и $K > 0$ такие, что для любого слабого решения $x(t)$ включения (1), удовлетворяющего условию $\|x(0)\| \leqslant \sigma$, выполняется неравенство

$$E(\|x(t)\|^r) \leqslant K \quad \forall t \geqslant 0.$$

Условие *II*). Включение (1) не имеет ненулевых слабых решений $x(t)$ таких, что $x(0) = 0$ п. н.

Определение 2. Нулевое решение называют устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ с $\|x(0)\| \leqslant \delta$ п. н. имеем $P\{\sup\limits_{t\geqslant 0}\|x(t)\| \geqslant \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_2$.

Определение 3. Нулевое решение называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если *а*) оно устойчиво по вероятности, *б*) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| < K$ п. н., выполняется $x(t) \underset{t\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$.

Определение 4. Нулевое решение называется ϖ-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ включения (1), для которого $\|x(0)\| \leqslant \delta$ п. н., имеем $E(\|x(t)\|^{\varpi}) \leqslant \varepsilon$ $\forall t \geqslant 0$.

Определение 5. Нулевое решение называется глобально асимптотически (ϖ,ϖ_1)-устойчивым, если *а*) оно ϖ-устойчиво, *б*) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leqslant K$ п. н., выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.

Определение 6. Нулевое решение называется асимптотически (ϖ,ϖ_1)-устойчивым, если *а*) оно ϖ-устойчиво, *б*) существует $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leqslant K$ п. н., выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.

Теорема 1. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* L) *и функция* $V(x)$ *в этом условии — положительно определенная. Тогда нулевое решение включения* (1) *устойчиво по вероятности. Если, кроме того,* $V(x) \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *и множество* N_V *не содержит ненулевых слабых решений на промежутке* $]-\infty,+\infty[$, *то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* L) *и функция* $V(x)$ *в этом условии удовлетворяет неравенствам:* $k\|x\|^{\varpi_1} \leqslant V(x)$ $\forall x$, $\|x\| \geqslant a$; $k_1\|x\|^{\varpi} \leqslant V(x)$ $\forall x$,

$\|x\| \leqslant b$, *где* $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ *— положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений включения* (1) *на промежутке* $]-\infty, +\infty[$, *принадлежащих множеству* N_V, *то нулевое решение является глобально асимптотически* (ϖ, ϖ_1)*-устойчивым.*

Теорема 3. *Пусть включение* (1) *удовлетворяет условиям* L), I), II) *и пусть* $0 < s < r$. *Если существует постоянная* $a > 0$ *такая, что включение* (1) *не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$ *на промежутке* $]-\infty, 0]$, *обладающих свойствами:* $x(t) \in n_V$; $E(\|x(t)\|^s) \leqslant a \quad \forall t \in]-\infty, 0]$, *то нулевое решение включения* (1) s*-устойчиво.*

Если, кроме того, существует постоянная $b > 0$, *такая, что включение не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$, *таких, что* $x(t) \in M_V$, $E(\|x(t)\|^s) \leqslant b$ $\forall t \in]-\infty, \infty[$, *то нулевое решение асимптотически* (s, s)*-устойчиво.*

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБРАЩЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В.Л. Розенберг

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
rozen@imm.uran.ru

Задачи реконструкции и оптимального управления в условиях неопределенности занимают значительное место в современной математической теории управления и ее приложениях. В различных интерпретациях они исследовались для многих систем, в том числе описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) и стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). В настоящей работе подходы, разработанные в рамках теории позиционного управления, развитой Н. Н. Красовским и его школой [1], применяются к решению некоторых, специальным образом поставленных, задач динамического обращения и гарантирующего управления при неполной информации для линейного СДУ.

Рассматривается линейное СДУ следующего вида:

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t))\,dt + B_2(t)U_2(t)\,d\xi(t,\omega), \quad x(t_0,\omega) = x_0. \qquad (1)$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k\times k}$)); $f(t)$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n\times 1$, $n\times n$, $n\times r$ и $n\times k$, соответственно. В системе действуют два измеримых управления: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \ldots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \ldots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, которые принимают значения из заданных ресурсов управления S_{u1} и S_{u2}, являющихся выпуклыми компактами. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21}d\xi_1, u_{22}d\xi_2, \ldots, u_{2k}d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k})$ характеризует амплитуду случайных помех.

Решение уравнения (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему стохастический интеграл Ито. При сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями. Отметим, что уравнения типа (1) описывают простейшие линеаризованные модели: изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде, динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов или движения частиц в некотором поле.