3. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications.* Kluwer Acad. Publ., 1993.

4. Egorov A. D., Zherelo A. V. *Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations* // Monte Carlo Methods and Applications. 2004. V. 10. P. 257–264.

5. Egorov A. D., Sabelfeld K. K. *Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations* // Monte Carlo Methods and Appl. 2010. V. 16. P. 95–127.

6. Egorov A. Д. *О приближенном вычислении математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Ито — Леви* // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59. № 1. С. 13–17.

7. Maliutin V. B. *Approximation of solution of the system of nonlinear stochasic differential equations* // Computational methods in applied mathematics. 2005. V.5. № 4. P. 410–421.

8. Далецкий Ю. Л. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* М.: Наука, 1983.

9. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochasic Equations in Infinite Dimensions* Cambridge Univercity Press, 1992. P. 232–256.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛЕСНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.В. Игнатенко, Т.А. Любецкая

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
{ihnatsenko,lutanya}@tut.by

Дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях народного хозяйства, при исследовании и проектировании технологических процессов. Покажем их применение в лесной промышленности на примере рационального выбора подающего устройства для раскряжевочной установки (раскряжевочная установка — это машина, которая производит распиловку хлыстов (ствол дерева без сучьев) на бревна нужной длины) [1].

Раскряжевочная установка может находиться в следующих состояниях: S_0 — установка исправна и простаивает из-за отсутствия хлыстов, S_1 — установки осуществляет раскряжевку хлыстов. Обозначим через $P_0(t)$ вероятность того, что в момент времени t установка находится в состоянии S_0, $P_1(t)$ — в состоянии S_1. Для любого момента времени t: $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

Математическая модель функционирования раскряжевочной установки представляет систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lambda P_0 + \mu P_1, \quad \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1 + \lambda P_0. \tag{1}$$

В первое уравнение системы (1) подставим вместо P_1 его выражение $P_1 = 1 - P_0$ и решим при $P_0(0) = 1$. Получим

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad P_1 = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{2}$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ найдем финальные вероятности. В установившемся режиме имеем:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad \lambda = \frac{1}{t_1}, \quad \mu = \frac{1}{t_0},$$

где t_1 — среднее значение времени между поступлениями предметов труда на обработку; t_0 — средняя продолжительность цикла обработки. Вероятность P_1 представляет собой коэффициент использования рабочего времени.

Рассмотрим работу раскряжевочной установки на конкретном примере. Пусть система раскряжевки работает с циклом обработки $t_0 = 1$ мин. Интенсивность подачи можно изменять. Необходимо установить рациональную интенсивность подачи и цикл подачи хлыста. Интенсивность обработки составит $\mu = 1/t_{\text{ц}} = 1/1 = 1\,\text{хлыст/мин}$.

Задаваясь различными значениями λ, по формулам (2) можно построить зависимости для P_0 и P_1.

При интенсивности подачи 1 хлыст/мин вероятность работы установки составит 0,5. Начиная с $\lambda = 5 - 6$, дальнейшее увеличение параметра существенно не повысит вероятность рабочего состояния. Так, увеличение λ с 5 до 7 повысит P_1 лишь на 2%.

Рациональный цикл подачи хлыстов составит $t_{\text{п}} = 1/\lambda = 1/5 = 0,2\,\text{мин}$.

Полученное значение цикла подачи хлыста позволяет выбирать подающий механизм: растаскиватель, манипулятор или др.

В анализируемых вариантах $\lambda/\mu < 1$, а если система работает в режиме $\lambda/\mu > 1$, то предыдущий механизм вынужден простаивать либо предметы труда накапливаются перед обрабатывающей установкой. Последний случай может иметь место в течение кратковременного периода работы установки.

Литература

1. Игнатенко В. В., Турлай И. В., Федоренчик А. С. *Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок*: учеб. пособие для студентов специальности «Лесоинженерное дело». Мн.: БГТУ, 2004.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь

artyom.ruseckiy@gmail.com

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — полное вероятностное пространство.

Рассмотрим задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$dX(t,\omega) = L'(t)X(t,\omega)dt + g(t)dW(t,\omega), \quad X(0,\omega) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in T = [0,b]$, $\omega \in \Omega$, $X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega))^\top$, $X_0 = ((X_0^1, X_0^2, \ldots \ldots, X_0^n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $dW(t,\omega) = (0,\ldots,0,dB(t,\omega))^\top$, $L'(t) = (L'_{ij}(t))$, где $L'_{ij}(t) = 1$, при $i = j$, и $L'_{ij}(t) = 0$, при $i \neq j$, если $i = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{1,n}$ и $L'_{nj}(t) = -a'_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, где $a_j : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, $a'_j(t)$, $j = \overline{1,n}$ — их обобщённые производные Шварца. $B(t,\omega)$ — случайный процесс броуновского движения, $g(t) \in L_2(T)$.

Данная задача является некорректной в рамках классической теории дифференциальных уравнений, поскольку в уравнениях могут присутствовать произведения обобщённых функций.

Системы стохастических дифференциальных уравнений вида (1), могут использоваться в качестве моделей, описывающих динамику финансовых данных [1].

Рассмотрим задачу Коши для конечно-разностного уравнения, соответствующую задаче Коши (1) :

$$X_n(t+h_n,\omega) - X_n(t,\omega) = [L_n(t+h_n) - L_n(t)]X_n(t,\omega) + g_n(t)[W_n(t+h_n,\omega) - W_n(t,\omega)],$$

$$X_n(t,\omega)|_{[0,h_n)} = X_n^0(t,\omega), \tag{2}$$