Литература

1. Капица П. Л. *Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
2. Капица П. Л., Капица С. П. *Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1949. Т. 19, № 2. С. 105-120.
3. Соколов В. И., Доманский И. В. *Газожидкостные реакторы.* Л., 1976.
4. Уоллис Г. Б. *Одномерные двухфазные течения.* М., 1972.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА И ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЕТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия
v572264@yandex.ru

Вопросам интерполирования сеточных функций посвящена обширная литература [1]. В настоящем сообщении сделана попытка приблизить процесс интерполирования дискретно заданной функции к условиям постановки прикладной задачи. Это могут быть геометрические или физические условия, наличие определенной симметрии или, наоборот, неоднородность среды процесса. Необходимо учитывать эти условия, выбирая метод интерполяции должным образом. Другими словами, метод интерполяции должен быть в известном отношении связан с характером дифференциального уравнения, определяющего процесс. Этим требованиям во многих случаях удовлетворяет аппарат обобщенных степеней (ОСБ), введенный Берсом [2].

Считая свойства ОСБ известными [2] и следуя идеям Лагранжа, в качестве интерполянта сеточной функции $f(x_i)$, где $i = 1, \dots, n+1$, рассмотрим многочлен порядка n от ОСБ

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^{(k)}(x, x_1). \tag{1}$$

Трудность в использовании ОСБ связана с тем, что их вычисление осуществляется последовательным интегрированием и может быть произведено аналитически только в небольшом числе важных случаев. Ниже предлагается хотя и приближенный, но эффективный и оправдавший себя в приложениях метод нахождения численных значений многочленов ОСБ.

Более удобно далее использовать несколько модифицированный многочлен (1)

$$F_m(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{1}{(k-1)!} X^{(k-1)}(x, x_1). \tag{2}$$

Далее используются операторы Берса [2]

$$D_1 = \alpha_1(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2 = \alpha_2 \frac{d}{dx}. \tag{3}$$

Основным в этом методе является решение задачи Коши для уравнения, которому удовлетворяет многочлен (1)

$$D_1 (D_2 D_1)^p F(x) = 0, \quad n = 2p, \quad (D_2 D_1)^{p+1} F = 0, \quad n = 2p+1. \tag{4}$$

В первом случае порядок многочлена (1) четный $n = 2p$, а во втором случае нечетный $n = 2p + 1$. Порядок дифференциального уравнения всегда на единицу больше порядка многочлена (1).

Задача Коши для (2) состоит в нахождении решения (4), удовлетворяющего в точке x_1 условиям

$$F(x_1) = a_1, \quad D_1F(x)|_{x_1} = a_2, \quad \dots, \quad \begin{cases} (D_2D_1)^pF(x)|_{x_1} = a_{n+1}, & n = 2p, \\ D_1(D_2D_1)^pF(x)|_{x_1} = a_{n+1}, & n = 2p+1. \end{cases} \tag{5}$$

Последовательные D_1- (D_2-) производные обозначим v_i, положив $v_1 = F(x)$. Введем вектор-столбец решения задачи (5), состоящий из последовательных производных

$$V(x) = (v_k(x)),\ V(x_1) = (v_k(x_1)), \quad k = \overline{1, n+1},$$

и матрицу $K(x, x_1)$ с элементами k_{ij}, где $i, j = \overline{1, n+1}$,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ \frac{1}{(j-i)!}\begin{cases} \widetilde{X}^{(j-i)}(x, x_1), & i = 2p, \\ X^{(j-i)}(x, x_1), & i = 2p+1, \end{cases} & j, i = \overline{1, n+1}. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши (5) можно записать в матричной форме

$$V(x) = K(x, x_1)V(x_1). \tag{6}$$

Поэтому из (6) для значений $V(x)$ в точке x_2 найдем конечное значение на отрезке $[x_1, x_2]$

$$V(x_2) = K(x_2, x_1)V(x_1).$$

Предположим, что в интервале (x_2, x_3) функции α_1, α_2, входящие в (3), удовлетворяют стандартным условиям [2]. В этом случае точка x_2 может рассматриваться как граничная, где заданы условия Коши, т. е.

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x, x_2)V^{(1)}(x_2) = K^{(2)}K^{(1)}V^{(1)}(x_1) \tag{7}$$

Здесь введено условие, что верхний индекс в скобках у всех величин на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, за исключением ОСБ, обозначает номер отрезка.

Если на оси x задано конечное число точек $x_1, \dots, x_{n+1}$, то процесс может быть продолжен, и для i-го участка имеем

$$V^{(i)}(x, x_i) = K^{(i)}(x, x_1)V(x_1) = K^{(i)}(x, x_i)K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1})\dots K^{(2)}(x_3, x_2)K^{(1)}(x_2, x_1)V(x_1).$$

Назовем матрицу $K^{(i)}(x, x_1)$ общей матрицей интервала (x_1, x_{i+1}).

Таким образом, многочлен последовательно определен на системе отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Это представление является точным, ибо все степени $X(x, x_i)$ предполагаются найденными по их определению как последовательные интегралы.

Однако если отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ малы, что всегда можно сделать, их выражения могут быть аппроксимированы с достаточной для приложений точностью. Приведены примеры. Одновременно вычислены все D-производные.

Перейдем к вопросу об интерполяции. В выражении (7) первый элемент вектора-столбца $V^{(i)}(x_{i+1}, x_i)$ есть многочлен (1), определенный в точке x_{i+1}, т. е. $v_1^{(i)}(x_{i+1}, x_i) = f(x_{i+1})$. Ясно, что получаем систему n уравнений для определения констант a_k, $k = 2, \dots, n$. Можно показать, что определитель системы интерполяции отличен от нуля. Приведены примеры вычислений на ЭВМ в среде Mathcad.

Небольшие изменения в постановке краевой задачи Коши, когда последняя производная произвольна и допускается ее разрыв на границе областей, а заданной считаем компоненту $v_1(x_{i+1})$ на правой стороне отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, позволяет использовать метод для сплайновой интерполяции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания, задание № 340/2015, проект № 1416).

Литература

1. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
2. Bers L., Gelbart A. *On a class of function defined by partial differential equations* // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 56. No 1. P. 67–93, 232–256.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Егоров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
egorov@im.bas-net.by

Нахождение вероятностных характеристик решений стохастических уравнений является одной из важных задач, возникающих при исследовании таких уравнений, а также при их применении в приложениях. В общем случае получение числовых значений характерик сводится к вычислению функционалов вида $E[f(X_{(\cdot)})]$, где $X_{(\cdot)}$ — решение стохастического уравнения, f — функционал, заданный на траекториях решения, E обозначает математическое ожидание. В данном докладе мы ограничиваемся рассмотрением стохастических дифференциальных уравнений, содержащих стохастические интегралы типа Ито. К настоящему времени наиболее исследована задача нахождения ожиданий от решений в случае, когда $f(X_{(\cdot)} = g(X_t)$, где $g(\cdot)$ — функция вещественной переменной [1, 2]. Рассмотрение общего случая произвольных функционалов, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости, было начато в работах, посвященных приближенному вычислению функциональных интегралов по мерам, порождаемым случайными процессами [3]. Применение схем, основанных на использовании дискретных аппроксимаций решения и методов статистического моделирования малоэффективно, в силу необходимости аппроксимации также и функционала от решения, что приводит к существенному увеличению вычислительной сложности алгоритмов. Поэтому в подходе, предложенном в [3, 4], используются квадратурные формулы для вычисления математического ожидания функционала, аппроксимационно точные для функциональных многочленов от решения рассматриваемого уравнения, в сочетании со стохастическими аппроксимациями решения. В случае линейных уравнений построены формулы, точные для функциональных многочленов заданной степени от решения [5, 6]. В работе [7] разработан метод, основанный на использовании вспомогательных некоммутирующих операторов, для получения аппроксимаций математического ожидания решения системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих реакцию веществ с учетом их диффузии. Целью настоящего исследования является расширение указанных в приведенных ссылках методов вычисления математических ожиданий функционалов от решений стохастических уравнений на уравнения с частными производными. В связи с этим рассматривается вопрос построения приближенных формул для вычисления ожиданий функционалов от случайных процессов со значениями в бесконечномерных пространствах. Ниже используются определения из [3, 8, 9].