принадлежат пространству $\mathcal{H}_{\alpha,T}$ для любых $T \in R_+$, $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$ п. н.) такой, что для любых $T > 0$, $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant 2$ с вероятностью 1 выполняется условие

$$\int\limits_0^T E_0(|y(t)|_\alpha^p)\,dt < \infty,$$

и для каждого $t \in R_+$ почти наверное выполняется равенство

$$y(t) = K(t,0)\xi + \int\limits_0^t K(t,s)f(s,y(s))\,ds + \int\limits_0^t K(t,s)g(s,y(s))\,dW(s) + \int\limits_0^t K(t,s)b(s,y(s))\,dB^H(s),$$

где интеграл по стандартному броуновскому движению — интеграл Ито, интеграл по дробному броуновскому движению — потраекторный интеграл Римана — Стилтьеса.

Определение 2. Будем говорить, что решение $y(t)$ уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi \in \mathcal{P}$ является *единственным*, если для любого решения $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(0) = \xi$ выполняется условие $P(y(t) = z(t)\ \forall t \in R_+) = 1$.

Определение 3. Пусть $\alpha \in (1-H, 1/2)$, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что нулевое решение $y(t) \equiv 0$ уравнения (1) является (α,p)*-асимптотически устойчивым по вероятности*, если выполняются следующие условия: 1) для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует постоянная $r = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такая, что для любого $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant r$ п. н., выполняется неравенство $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon_1) \leqslant \varepsilon_2$ для любых $t \in R_+$, 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $K = K(\varepsilon) > 0$ такая, что для любого $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant K$ п. н., имеет место сходимость $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $y_\xi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi$.

Определение 4. Пусть $\alpha \in (1-H, 1/2)$, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) является (α,p)*-притягивающим*, если для любых $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и любой случайной величины $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant K$ п. н., имеет место сходимость $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $y_\xi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi$.

Предложение 1. [1]. *Если выполняется условие* A, *то для любого* $\xi \in \mathcal{P}$ *уравнение (1) с начальным условием* $y(0) = \xi$ *имеет единственное решение.*

Теорема 1. *Пусть выполняются условия A, B1, B2, B4, тогда для любых* $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant p^*(\alpha, H) = \max\{4/(1-2\alpha), 1/(1-H)\}$ *нулевое решение уравнения (1) является* (α,p)*-асимптотически устойчивым по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A, B1, B2, B3, тогда для любых* $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant p^*(\alpha, H)$ *нулевое решение уравнения (1) является* (α,p)*-притягивающим.*

Литература

1. Леваков А. А., Васьковский М. М. *Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РАСЧЕТУ ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.М. Волк

Белорусский государственный технологический университет

anatoliyvolk@mail.ru

Пленочные течения широко используются в газожидкостных реакторах, тепломассообменных аппаратах и других технических устройствах [1–4]. Гидродинамика этих течений имеет важное значение при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических устройств. В двухфазных потоках возникает необходимость исследования устойчивости движения при противотоке жидкой пленки и газового потока. Теоретические и экспериментальные исследования гидродинамики двухфазных течений позволяют расширить область применения жидких пленок и интенсифицировать в них процессы тепломассопереноса.

Рассмотрим стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости под воздействием закрученного газового потока по внутренней стенке вертикального цилиндра. Ось z цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндра. Из уравнение неразрывности, в силу осесимметричности, при $U_r = 0$ решение уравнений Навье — Стокса будет автомодельным, т. е. скорость пленки будет только функцией радиуса $U = U(r)$. В данном случае для осевой для осевой составляющей скорости получим уравнение

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_z}{dr}\right)\right) + \rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и заданы касательные напряжения на границе раздела фаз газ — жидкость. Тогда граничными условиями будут:

$$U_z|_{r=R} = 0; \quad \mu\frac{dU_z}{dr}\bigg|_{r=R-\delta} = -\tau_z.$$

Принимаем $\psi = \partial P/\partial z = \mathrm{const}$, интегрируем уравнение (1) и находим

$$U_z = c_1 \ln r - \frac{\rho g - \psi}{4\mu} r^2 + c_2.$$

Условия равновесия сил, действующих на газовый поток [3]: $\pi(R-\delta)^2\Delta P = 2\pi(R-\delta)l\tau_z$, дают возможность заменить перепад давления в пленке касательными напряжениями сил трения на границе раздела фаз. Учитывая граничные условия [2] и выполнив переход к безразмерным переменным $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{\delta} = \delta/R$, получим осевую составляющую скорости в пленке жидкости

$$U_z = \frac{\tau_z R}{2\mu(1-\tilde{\delta})}(1-\tilde{r}^2) + \frac{\rho g R^2}{4\mu}\left[2(1-\tilde{\delta})^2 \ln\tilde{r} + 1 - \tilde{r}^2\right]. \tag{1}$$

Аналогично получается автомодельное решение для закрученного пленочного течения. Считаем, что трансверсальная составляющая скорости зависит лишь от радиуса $U_\varphi = U_\varphi(r)$. В этом случае имеем уравнение

$$\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,U_\varphi)\right) = 0$$

и получим решение

$$U_\varphi = c_1\tilde{r} + \frac{c_2}{\tilde{r}}.$$

Используем граничные условия:

$$U_\varphi|_{\tilde{r}=1} = 0; \quad \tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{U_\varphi}{\tilde{r}}\right)\bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{R\,\tau_\varphi}{\mu};$$

находим произвольные постоянные и получим трансверсальную составляющую скорости

$$U_\varphi = \frac{R\tau_\varphi\left(1-\tilde{\delta}\right)^2}{2\mu}\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}\right). \tag{2}$$

Полученное решение (1), (2) позволяет получить расчетные режимы течения пленки, которые зависят от величины и направления составляющей τ_z тензора касательных напряжений сил трения на границе раздела фаз, расхода жидкой фазы и радиуса цилиндра R.

Литература

1. Капица П. Л. *Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
2. Капица П. Л., Капица С. П. *Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1949. Т. 19, № 2. С. 105-120.
3. Соколов В. И., Доманский И. В. *Газожидкостные реакторы.* Л., 1976.
4. Уоллис Г. Б. *Одномерные двухфазные течения.* М., 1972.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА И ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЕТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия
v572264@yandex.ru

Вопросам интерполирования сеточных функций посвящена обширная литература [1]. В настоящем сообщении сделана попытка приблизить процесс интерполирования дискретно заданной функции к условиям постановки прикладной задачи. Это могут быть геометрические или физические условия, наличие определенной симметрии или, наоборот, неоднородность среды процесса. Необходимо учитывать эти условия, выбирая метод интерполяции должным образом. Другими словами, метод интерполяции должен быть в известном отношении связан с характером дифференциального уравнения, определяющего процесс. Этим требованиям во многих случаях удовлетворяет аппарат обобщенных степеней (ОСБ), введенный Берсом [2].

Считая свойства ОСБ известными [2] и следуя идеям Лагранжа, в качестве интерполянта сеточной функции $f(x_i)$, где $i = 1, \dots, n+1$, рассмотрим многочлен порядка n от ОСБ

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^{(k)}(x, x_1). \tag{1}$$

Трудность в использовании ОСБ связана с тем, что их вычисление осуществляется последовательным интегрированием и может быть произведено аналитически только в небольшом числе важных случаев. Ниже предлагается хотя и приближенный, но эффективный и оправдавший себя в приложениях метод нахождения численных значений многочленов ОСБ.

Более удобно далее использовать несколько модифицированный многочлен (1)

$$F_m(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{1}{(k-1)!} X^{(k-1)}(x, x_1). \tag{2}$$

Далее используются операторы Берса [2]

$$D_1 = \alpha_1(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2 = \alpha_2 \frac{d}{dx}. \tag{3}$$

Основным в этом методе является решение задачи Коши для уравнения, которому удовлетворяет многочлен (1)

$$D_1 (D_2 D_1)^p F(x) = 0, \quad n = 2p, \quad (D_2 D_1)^{p+1} F = 0, \quad n = 2p + 1. \tag{4}$$