УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАНДАРТНЫМ И ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

М.М. Васьковский

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
vaskovskii@bsu.by

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, r-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$, m-мерное дробное броуновское движение $B^H(t)$ с показателем Херста $H \in (1/2, 1)$ такие, что $W(t)$ является стандартным $\mathcal{F}_t$-броуновским движением, дробное броуновское движение $B^H(t)$ является $\mathcal{F}_0$-измеримым, процессы $W(t)$, $B^H(t)$ являются независимыми.

Рассмотрим нелинейную стохастическую систему

$$dy(t) = A(t)y(t)\,dt + f(t, y(t))\,dt + g(t, y(t))\,dW(t) + b(t, y(t))\,dB^H(t), \quad t \in R_+, \quad y \in R^d, \quad (1)$$

где $A : R_+ \to R^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция такая, что $|A(t)| \leqslant a < \infty$ для любого $t \in R_+$; функции $f : R_+ \times R^d \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$, $b : R_+ \times R^d \to R^{d\times m}$ измеримы по Борелю, $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$, $b(t, 0)$ для почти всех $t \in R_+$.

Пусть $K(t, \tau) = X_A(t)X_A^{-1}(\tau)$ — матрица Коши системы

$$dy(t) = A(t)y(t), \quad (2)$$

где $X_A(t) = [x_1, \ldots, x_d]$ — нормальная фундаментальная матрица системы (2). Через σ_Γ обозначим показатель неправильности Гробмана системы (2). Пусть λ_i — показатель Ляпунова решения $x_i(t)$. Не нарушая общности, считаем, что $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_d$.

Обозначим через $E_0(\zeta)$ — условное математическое ожидание случайной величины ζ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_0$, а через $\mathcal{P}$ — множество всех $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин $\eta : \Omega \to R^d$.

(A): отображения f, g удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, отображение b удовлетворяет $(\nu, 1)$-условию Гёльдера, где $\nu > 1 - H$.

(B1): $\lambda_d < 0$;

(B2): существует постоянная L такая, что для любых $(t, y) \in R_+ \times R^d$ выполняется неравенство $|X_A^{-1}(t)f(t, y)| + |X_A^{-1}(t)g(t, y)| \leqslant L|y|$;

(B3): существуют постоянные L, $N \geqslant 0$ такие, что для любых s, $\tau \in R_+$, y_1, $y_2 \in R^d$ выполняются неравенства $|X_A^{-1}(s)b(s, y_1) - X_A^{-1}(\tau)b(\tau, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| + N\sum_{i=1}^k |s - \tau|^{\rho_i}$, где $\rho_i \in (1 - H, 1]$, $i = 1, \ldots, k$, $\rho = \max_i \rho_i > \min\{1/2, \nu\}$;

(B4): выполняется условие B3 с постоянной N, равной нулю.

Для каждых $\alpha \in (0, 1/2)$, $T > 0$ определим пространство $\mathcal{H}_{\alpha,T}$ измеримых функций $h : [0, T] \to R^d$ с нормой $\|h(\cdot)\|_{\mathcal{H}_{\alpha,T}} := \sup\limits_{t\in[0,T]} |h(t)|_\alpha < \infty$, где

$$|h(t)|_\alpha = |h(t)| + \int\limits_0^t \frac{|h(t) - h(s)|}{(t - s)^{\alpha+1}}\,ds.$$

Обозначим $\alpha^* = \min\{\nu, \rho, 1/2\})$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi \in \mathcal{P}$ будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс $y(t)$, $t \in R_+$, имеющий почти наверное непрерывные по Гёльдеру траектории любого порядка $\alpha \in (1 - H, \alpha^*)$ (т. е. функции $y(t)$, $t \in [0, T]$, принадлежат пространству $\mathcal{H}_{\alpha,T}$ для любых $T \in R_+$, $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$ п. н.) такой, что для любых $T > 0$, $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant 2$ с вероятностью 1 выполняется условие

$$\int\limits_0^T E_0(|y(t)|_\alpha^p)\,dt < \infty,$$

и для каждого $t \in R_+$ почти наверное выполняется равенство

$$y(t) = K(t,0)\xi + \int\limits_0^t K(t,s)f(s,y(s))\,ds + \int\limits_0^t K(t,s)g(s,y(s))\,dW(s) + \int\limits_0^t K(t,s)b(s,y(s))\,dB^H(s),$$

где интеграл по стандартному броуновскому движению — интеграл Ито, интеграл по дробному броуновскому движению — потраекторный интеграл Римана — Стилтьеса.

Определение 2. Будем говорить, что решение $y(t)$ уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi \in \mathcal{P}$ является *единственным*, если для любого решения $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(0) = \xi$ выполняется условие $P(y(t) = z(t)\ \forall t \in R_+) = 1$.

Определение 3. Пусть $\alpha \in (1-H, 1/2)$, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что нулевое решение $y(t) \equiv 0$ уравнения (1) является (α, p)*-асимптотически устойчивым по вероятности*, если выполняются следующие условия: 1) для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует постоянная $r = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такая, что для любого $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant r$ п. н., выполняется неравенство $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon_1) \leqslant \varepsilon_2$ для любых $t \in R_+$, 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $K = K(\varepsilon) > 0$ такая, что для любого $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant K$ п. н., имеет место сходимость $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $y_\xi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi$.

Определение 4. Пусть $\alpha \in (1-H, 1/2)$, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) является (α, p)*-притягивающим*, если для любых $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и любой случайной величины $\xi \in \mathcal{P}$, $|\xi| \leqslant K$ п. н., имеет место сходимость $P(E_0(|y_\xi(t)|_\alpha^p) > \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $y_\xi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $y(0) = \xi$.

Предложение 1. [1]. *Если выполняется условие* A, *то для любого* $\xi \in \mathcal{P}$ *уравнение (1) с начальным условием* $y(0) = \xi$ *имеет единственное решение.*

Теорема 1. *Пусть выполняются условия A, B1, B2, B4, тогда для любых* $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant p^*(\alpha, H) = \max\{4/(1-2\alpha), 1/(1-H)\}$ *нулевое решение уравнения (1) является* (α, p)*-асимптотически устойчивым по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A, B1, B2, B3, тогда для любых* $\alpha \in (1-H, \alpha^*)$, $p \geqslant p^*(\alpha, H)$ *нулевое решение уравнения (1) является* (α, p)*-притягивающим.*

Литература

1. Леваков А. А., Васьковский М. М. *Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РАСЧЕТУ ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.М. Волк

Белорусский государственный технологический университет

anatoliyvolk@mail.ru

Пленочные течения широко используются в газожидкостных реакторах, тепломассообменных аппаратах и других технических устройствах [1–4]. Гидродинамика этих течений