оптимизации [1], разработана теория декомпозиции [5, 6] для разделения ограничений (2)–(6) задачи (1)–(6) на независимые части, одна из которых представляет собой разреженную часть ограничений (2), вторая — ограничения общего вида. Затем, на основе полученных теоретических результатов, применяются эффективные алгоритмы и технологии [7, 8] построения численных решений для исследуемой математической модели (1)–(6) в целом. На основе применения конструктивной теории декомпозиции [8] для разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений и результатов, полученных для решения неоднородных сетевых задач линейной оптимизации [1], разработаны прямые точные опорные методы решения неоднородных сетевых задач дробно-линейной оптимизации вида (1)–(6) с применением современных достижений в технологии построения численных решений нелинейных задач математического программирования.

Доказан критерий оптимальности опорного мультипотока. Получена формула приращения дробно-линейной целевой функции (1). В случаях нарушения условий оптимальности на дугах и мультидугах, разработаны эффективные алгоритмы решения разреженных линейных систем для нахождения подходящих направлений [9] изменения допустимого мультипотока. Используются концепции теории графов и теории потоков для операций декомпозиции мультисети и построения общих решений разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравненийс с прямоугольными матрицами [10].

Литература

1. Пилипчук Л. А. *Линейные неоднородные задачи потокового программирования.* Минск: БГУ, 2009.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи.* Минск: БГУ, 1980.
3. Pilipchuk L. A., Vecharynski E. S., Y. H. Pesheva Y. H. *Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem* // Mathematica Balkanica. Vol. 22, Fasc. 3–4, 2008. P. 235–254.
4. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. *The General Solutions of Sparse Systems with Rectangular Mmatrices in the Problem of Sensors Optimal Location in the Nodes of a Generalized Graph* // Vestnik BSU. Ser. 1. 2015. No. 2. P. 91–96.
5. Pilipchuk L. A., Malakhouskaya Y. V., Kincaid D. R., Lai M. *Algorithms of Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure* // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4, No. 2. P. 191–202.
6. Pilipchuk L. A. *Network Optimization Problems* // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. Eds. D. Ivanchev and M. D. Todorov. Heron Press, Sofia, 2002. P. 66–79.
7. Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* New Jersey, 1993.
8. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear System and Their Applications.* Minsk: BSU, 2013.
9. Пилипчук Л. А. *Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования.* Минск: БГУ, 2013.
10. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. *Graph Algorithms in Sparse Linear Systems with Rectangular Matrices* // American Institute of Physics (*AIP*). AIP Conf. Proc. 2013. Vol. 1570. P. 485–490.

К ВОПРОСУ УСПОКОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

О.И. Урбан

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь urban_ola@mail.ru

Пусть объект управления описывается линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системой с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\frac{d}{dt}(A_0x(t)) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием $C_0A_0x(0) = C_0A_0q, u(t) \equiv 0, t < 0$, где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор решения уравнения (1), $u \in \mathbb{R}^r$ — управление; A_0, A, B_i — постоянные матрицы соответствующих размеров, $i = \overline{0, m}$; h — постоянное запаздывание; C_i, $i = 0, 1, \ldots$ — базовые матрицы. Предполагается, что пара матриц (A_0, A) регулярная, т. е. существует такое число $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), для которых $\det(A - \alpha A_0) \neq 0$.

Будем считать, что система (1) не обладает свойством полной управляемости. Работа посвящена задаче построения регулятора с обратной связью по состоянию, обеспечивающего успокоение решения многовходной линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы, то есть построению регулятора, обеспечивающего выполнение для системы (1) тождества

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \tag{2}$$

где $t_1 > 0$ — некоторый момент времени (один и тот же для всех начальных условий системы (1).

Определим последовательность векторов δ_k, $k = m, m+1, \ldots$ как решение разностного уравнения $B_0\delta_k + \sum_{i=1}^m B_i\delta_{k-i} = 0$, $k = m, m+1, \ldots$ с начальным условием $\delta_i = \tilde{\delta}_i$, $i = \overline{0, m-1}$. Последовательность δ_k, $k = m, m+1, \ldots$ существует в том и только в том случае, когда $\tilde{\delta}_{m-i} = T_ic$, $i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r \times r_T}$ — некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^{r_T}$ произвольный постоянный вектор (один и тот же для всех матриц T_i), r_T — некоторое число. Положим $T = T_m$. Матрицу $S \in \mathbb{R}^{r_T \times r_T}$ определим как решение уравнения $B_0T_1S + \sum_{i=1}^m B_iT_i = 0$, $T_kS = T_{k-1}$, $k = \overline{2, m}$, разрешимость которого следует из определения матриц T_i. Определим матрицы $G_i = \sum_{k=0}^i B_kTS^{i-k}$, $i = \overline{0, m}$, $G_A = \sum_{i=0}^{m-1} e^{-C_0Aih}G_i$. Обратим внимание, что $G_m = \sum_{i=0}^m B_iTS^{m-i} = 0_{n \times r_T}$. Обозначим $W(\lambda) = \lambda A_0 - A$, $B_A = \sum_{i=0}^m e^{-C_0Aih}B_i$.

Пусть $\mathbb{R}^{k_1 \times k_2}[z]$ — множество матриц размера $k_1 \times k_2$, элементы которых являются полиномами переменной z, $\mathbb{I}^{k_3 \times k_4}[z]$ — множество матриц размера $k_3 \times k_4$, элементы которых $I(z)$ являются интегро-разностными операторами, действующими на множестве кусочно-непрерывных функций $\phi(t)$, $t > t_1$, по правилу

$$I(z)\phi(t) = \sum_{i=0}^N \int\limits_0^h e^{\lambda_k s}\frac{s^i}{i!}Q_i(z)\phi(t-s)\,ds, \quad t > 0,$$

где $Q_i(z) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[z]$, $i = \overline{0, N}$, $\lambda_k \in \Lambda_K$, где $\Lambda_K = \{\lambda_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, L}\}$ — некоторый набор действительных или комплексно сопряженных чисел, L, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Для того, чтобы существовало управление* $u(t), t \geqslant 0$, *обеспечивающее* (2), *необходимо и достаточно выполнение условия* $\operatorname{rank}[W(\lambda), B_A, G_A] = n$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

При этом регулятор, обеспечивающий решению системы (1) выполнение тождества (2) можно построить в виде

$$u(t) = K_1(z)x(t) + \gamma_1\xi(t) + T\psi(t), \quad \psi(t) = S\psi(t-h) + K_2(z)x(t) + \gamma_2\xi(t),$$

$$\dot{\xi}(t) = I_1(z)x(t) + I_2(z)\xi(t) + I_3(z)y(t), \quad \dot{y}(t) = R_1(z)x(t) + R_2(z)\xi(t) + R_3(z)y(t), \quad t > 0,$$

где $K_1(z) \in \mathbb{R}^{r \times n}[z]$, $K_2(z) \in \mathbb{R}^{r_T \times n}[z]$, $T \in \mathbb{R}^{r \times r_T}$, $S \in \mathbb{R}^{r_T \times r_T}$, r_T — некоторое натуральное число, $\operatorname{col}[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma = \operatorname{col}[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$, где 1 стоит на l-м месте, $1 \leqslant l \leqslant r + r_T$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}^r$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{r_T}$; $I_1(z) \in \mathbb{I}^{1 \times n}[z]$, $I_2(z) \in \mathbb{I}^{1 \times 1}[z]$, $I_3(z) \in \mathbb{I}^{1 \times s}[z]$, $R_1(z) \in \mathbb{R}^{s \times n}[z]$, $R_2(z) \in \mathbb{R}^{s \times 1}[z]$, $R_3(z) \in \mathbb{R}^{s \times s}[z]$; $\xi(t)$ — скалярная функция, $\psi(t)$ — r_T-вектор-функция, $y(t) = \operatorname{col}[y_1(t), \ldots, y_s(t)]$ — s-вектор-функция. Функции $x(t)$, $t < -mh$ и $\xi(t)$, $\psi(t)$, $y(t)$, $t \leqslant 0$, могут быть любыми непрерывными.

В отличие от работы [1], предложенный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Литература

1. Хартовский В. Е., Урбан О. И. *Управление линейными автономными алгебро-дифференциальными системами посредством динамических регуляторов* // Весці НАН Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. №1. С. 36–42.

2. Урбан О. И. *К вопросу успокоения решения линейной автономной алгебро-дифференциальной системы с запаздыванием в управлении посредством динамического регулятора* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 367–377.

УПРАВЛЯЕМОЕ И НЕУПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

А.С. Шмыров, В.А. Шмыров

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
{a.shmyrov,v.shmyrov}@spbu.ru

Большинство современных космических проектов реализуется в околоземном пространстве. Окрестности коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 системы Солнце — Земля, находящееся на расстоянии порядка 1,5 млн км от центра Земли, также относятся к этой области космического пространства. Коллинеарные точки либрации являются модельными понятиями задачи трех тел и ее различных модификаций, и являются неустойчивыми [1]. Для длительного пребывания космического аппарата (КА) в окрестности космической точки либрации требуется применение управляющего воздействия [2–5].

В данной работе мы ставим целью построение управления, переводящего КА на многообразие ограниченных траекторий, на котором КА может пребывать длительное время в окрестности точки либрации без управления [3, 5]. Исследование проводится в рамках уравнений Хилла для круговой задачи трех тел. Построение такого многообразия, а также оптимизационная задача реализуется в рамках линеаризованных уравнений. Проводится численный эксперимент, в рамках КА переходит на траектории, близкие к этому многообразию. Оценивается промежуток времени, в течение которого КА находится на этих траекториях без управления, а затем уходит из окрестности точки либрации. Численное моделирование, с управлениями, полученными по линейному приближению, проводится для двух моделей — для уравнений Хилла и уравнений круговой задачи трех тел. Оценивается влияние нелинейности уравнений Хилла и уравнений задачи трех тел на время нахождения КА в окрестности точки либрации.

На рис. 1 приведен график движения в окрестности точки либрации на временном промежутке порядка 2 лет с управлением, реализующим переход на такое многообразие в пространства положений (x_1, x_2, x_3). Точка либрации L_1 имеет координаты $(x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$, начальные данные в пространстве положений $(x_1 = 1.05,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.05)$.

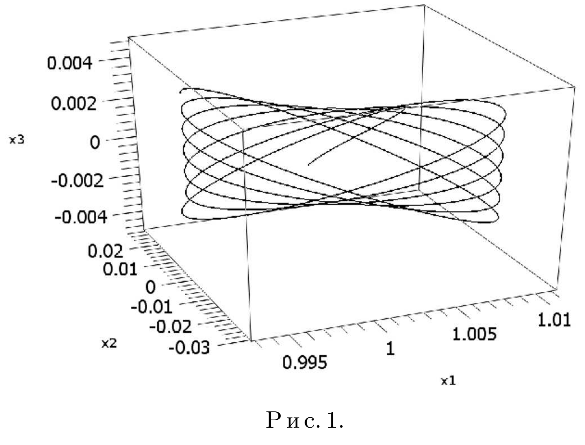

Рис. 1.