управляема в смысле определения 2, *то найдутся такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\delta > 0$, *что для любых числа* $t_0 \geqslant 0$ *и вектора* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство* (4).

Замечание. В общем случае для любых вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $(n \times m)$-матрицы G верно неравенство $(\operatorname{sign} G)\,\xi \neq \operatorname{sign}(G\xi)$, поэтому левые части в неравенствах (3) и (4) не равны.

Литература

1. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. №1. P. 102–119.

2. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. №10. С. 1804–1813.

3. Зайцев В. А. *Критерий равномерной полной управляемости линейной системы* // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 157–179.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЧИСТНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

В.В. Крахотко[1], **Г.П. Размыслович**[1], **В.В. Игнатенко**[2]

[1] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
{krakhotko,razmysl}@bsu.by,
[2] Белорусский государственный технологический университет
ihnatsenko@tut.by

Рассмотрим систему управления

$$A_0 x(t+1) = Ax(t-h) + Bu(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(\cdot) = \{x(\tau) = q_\tau,\ \tau = -h, -h+1, \ldots, 0\}, \tag{2}$$

где x — n-вектор, u — r-вектор (управление), A_0, A, B — постоянные матрицы соответствующих размеров, h $(h > 1)$ — натуральное число (запаздывание), q_i, $i = \overline{-h, 0}$, — заданный n-вектор.

При $\det A_0 \neq 0$ система (1), (2) исследовалась в работе [1]. Поэтому будем считать, что $\det A_0 = 0$ и пучок матриц $\lambda A_0 - A$ является регулярным т. е. найдется $\tilde\lambda \in C$ такое, что $\det(\tilde\lambda A_0 - A) \neq 0$. В силу этого без ограничения общности, можно считать, что для матриц системы (1) выполняются условия $A_0 A = AA_0$, $\ker A_0 \cap \ker A = \{0\}$.

Определение 1. Обратной матрицей Дразина [2] к любой квадратной матрице A называется матрица A^D, которая удовлетворяет систем уравнений

$$A^D A = AA^D; \quad A^D A A^D = A^D; \quad A^D A^{k_0+1} = A^{k_0},$$

где $k_0 = \operatorname{ind} A$ — индекс матрицы A (наименьшее неотрицательное число, такое что $\operatorname{rank} A^{k_0+1} = \operatorname{rank} A^{k_0}$).

Определение 2. Начальное состояние $x_0(\cdot)$ назовем допустимым, если найдется управление $u(t)$, $t \geqslant 0$, такое, что система (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t \geqslant 0$.

Решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, системы (3) будем искать в виде $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, где $x_1(t) = A_0^D A_0 x(t)$, $x_2(t) = (E - A_0^D A_0)x(t)$, где A_0^D — обратная Дразина для матрицы A_0.

Умножая обе части системы (1) слева на A_0^D, получим:

$$A_0^D A_0 x(t+1) = A_0^D A x(t-h) + A_0^D B u(t)$$

или, используя свойства обратных матриц Дразина,

$$x_1(t+1) = A_0^D A x_1(t-h) + A_0^D B u(t). \tag{3}$$

Аналогично, умножая систему (1) слева на матрицу $A^D(E - A_0^D A_0)$, получим

$$A^D A_0(E - A_0^D A_0)x_2(t+1) = x_2(t-h) + (E - A_0^D A_0)A^D B u(t). \tag{4}$$

Легко показать, что система (3) имеет решение

$$x_1(t) = (A_0^D A)^{d_t} A_0^D A_0 z_{t-d_{t(h+1)}} + \sum_{s=1}^{d_t} (A_0^D A)^{s-1} A_0^D B u(t+h-s(h+1)),$$

где $d_t = \left[\dfrac{t-1}{h+1}\right] + 1,\ z_\tau \in R_n$.

Аналогичным образом, исследуя уравнение (4) и поскольку $(A^D A_0)^{k_0}(E - A_0^D A_0) = 0$, имеем

$$x_2(t) = -(E - A_0^D A_0) \sum_{j=0}^{k_0-1} (A^D A_0)^j A^D B u(t+h+j(h+1)).$$

Окончательно

$$x(t) = (A_0^D A)^{d_t} A_0^D A_0 z_{t-d_t}(h+1) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{d_t} (A_0^D A)^{s-1} A_0^D B u(t+h-s(h+1)) - (E - A_0^D A_0) \sum_{j=0}^{k_0-1} (A^D A_0)^j A^D B u(t+h+(h+1)j).$$

Введем обозначение

$$\Omega = \left\{ x(\tau) \mid x(\tau) = A_0^D A_0 z_\tau - (E - A_0^D A_0) \sum_{j=0}^{k_0-1} (A_0^D A_0)^j A^D B u(\tau+h+(h+1)j),\ \tau = -\overline{h,0},\ z_\tau \in R^n \right\},$$

Тогда нетрудно видеть, что начальное состояние (2) для системы (1) является совместным, если оно принадлежит Ω.

Для удобства записи решения по уравнениям (3) и (4) введем в рассмотрение определяющие уравнения [1]:

$$X_{t+1}^1 = A_0^D A X_{t-h}^1 + A_0^D B U_t,$$
$$A^D A_0(E - A_0^D A_0)X_{t+1}^2 = X_{t-h}^2 + A^D(E - A_0^D A)BU_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5}$$

которые будем решать при условиях $U_0 = E$; $U_t \equiv 0$, $t \neq 0$, $X_t^1 \equiv 0$, $t \leqslant 0$; $X_t^2 \equiv 0$, $t \geqslant 1$. Обозначим через X_t^0 решение уравнения (5) при начальных условиях $U_t \equiv 0$, $\forall t$; $X_0^0 = A_0^D A_0$; $X_t^0 \equiv 0$, $t < 0$.

Тогда в терминах решений определяющих уравнений решение $x(t)$, $t > 0$, системы (1) с начальными условиями $x_0(.) \in \Omega$ запишется в виде:

$$x(t) = X_{d_t}^0 z_{t-d_{t(h+1)}} + \sum_{s=1}^{d_t} X_s^1 u(t+h-s(h+1)) + \sum_{j=0}^{k_o-1} X_{-j}^2 u(t+h+j(h+1)). \tag{6}$$

Определение 3. Систему (1) назовем условно управляемой, если для любых начального условия $x_0(\cdot) \in \Omega$ и $c \in R^n$ существуют момент времени $t_1 > (k_0-1)h$ и управление $u(t)$, $t = (k_0-1)h+1,\ (k_0-1)h+2,\ \ldots < t_1 + (k_0-1)h$ такие, что решение системы удовлетворяет условию $x(t_1) = c$.

Определение 4. Систему (1) назовем управляемой из нуля, если для $\forall z_\tau,\ \ c \in R^n$, существуют момент времени $t_1 < +\infty$ и управление $u(t),\ \ t = \overline{0, 1, \ldots, t_1 + (k_0-1)h},$ такие, что решение системы удовлетворяет условиям $x(\tau) = 0$ для $\tau = \overline{-h, 0}$ и $x(t_1) = c$.

Из представления (6) решения $x(t),\ \ t \geqslant 0,$ дискретной дескрипторной системы (1) и приведенных выше определений вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *Для условной управляемости системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\{X_s^1,\ s = 1, 2, \ldots, d_{t_1} - d_{k_o h+1};\ X_{-j}^2,\ j = 0, 1, \ldots, k_0 - 1\} = n.$$

Теорема 2. *Система* (1) *управляема из нуля тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\operatorname{rank}\{X_{-j}^2,\ j = 0, 1, \ldots, k_0 - 1\} = \operatorname{rank}\{X_{-j}^2,\ j = 0, 1, \ldots, k_0 - 1; X_0^0\},$$

$$\operatorname{rank}\{X_s^1,\ s = 1, 2, \ldots, d_{t_1} - d_{k_0 h+1}; X_{-j}^2,\ j = 0, 1, \ldots, k_0 - 1\} = n.$$

Учитывая специфику начальных условий для системы (1) можно рассматривать и другие виды ее управляемости.

Литература

1. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5, 6, 7. С. 767, 1081, 1283.

2. Campbell S. L., Meyer C. D. // Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitman. London, England, 1979.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С КВАЗИРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В.Н. Лаптинский

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь

lavani@tut.by

Рассматривается задача управления [1]:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{p} K_i x(t_i) = 0, \tag{2}$$

$$x(a_s) = h_s, \quad s = 0, 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r (r \leqslant n),\ A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n}),\ Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times r}),\ I = [0,\ \tilde{T}),\ 0 < \tilde{T} \leqslant \infty,$ $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad h_s \in \mathbb{R}^n,\ \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T < \tilde{T},\quad 0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_m < T;$ $K_i,\ h_s,\ t_i,\ a_s$ — заданные величины типа [1], $\{t_i\} \bigcap \{a_s\} = \varnothing$.

В работе [1] установлено, что в некритическом случае методика [2] с использованием [3] может быть развита применительно к задаче (1)–(3), представляющей интерес в связи с рядом задач естественных наук (физика, химия и др.), техники (автоматика, робототехника и др.), экономики (например, управление финансовыми потоками).

В данной работе изучается случай, когда однородная система $d\varphi/dt = A(t)\varphi$ имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условию (2). Тогда возникают дополнительные условия интегрального типа, аналогичные условию ортогональности в периодической краевой задаче (см., например, [4, с. 217]). В частности, в полном критическом случае типа [2, гл. 2] имеет место дополнительное условие $\sum_{j=1}^{p} K_j \Phi(t_j) \int_0^{t_j} \Phi^{-1}(\tau) Q(\tau) u(\tau)\, d\tau = 0,$ а также условия, вытекающие из (3), $\int_0^{a_s} \Phi^{-1}(\tau) Q(\tau) u(\tau)\, d\tau = \Phi^{-1}(a_s) h_s - c,\ \ s = 0, 1, \ldots, m,$ где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы, c — произвольный постоянный вектор.