$G(s)$, $S \leqslant 0$, — $(m\times m)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m,$$

$$C_1 = \int\limits_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t)P^{-1}(t)\Phi_0^\top(t)\,dt, \quad \Phi_0(t) = F_0(t)B_0(t),$$

$$C_0 = C_3^{-1}A_4^{-1}B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^\top(t^*),$$

$$C_3 = \int\limits_{-\infty}^{0} (\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^\top(s))\,ds, \Pi\Phi(s) = G(s)B_2(t^*).$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.А. Козлов

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
kozlovaa@tut.by

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово векторное пространства с нормой $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ (здесь символ $^\top$ означает операцию транспонирования вектора или матрицы).

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Если матрица B принадлежит также и пространству интегрируемых с квадратом матричных функций, то имеет место

Определение 1 [1]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (*по Калману*), если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнено неравенство

$$\xi^\top \int_{t_0}^{t_1} X(t_0,\tau)B(\tau)B^\top(\tau)X^\top(t_0,\tau)\,d\tau\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2, \tag{2}$$

где $X(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (1) с нулевым управлением.

Очевидно, что данное определение выражено в терминах матрицы Коши $X(t,s)$ системы (1) с нулевым управлением и матрицы B при управлении. Поскольку матрица Коши абсолютно непрерывна, то вопрос о существовании интеграла в (2) сводится к вопросу интегрируемости с квадратом матрицы B. Если последняя не интегрируема с квадратом, то этот интеграл не существует, а, значит, для систем (1) с такой матрицей B определение 1 не имеет смысла. Е. Л. Тонковым [2] было введено иное определение равномерной полной управляемости, эквалентное определению 1 в случае интегрируемости с квадратом матрицы B, которое также имеет место и для случая, когда матрица при управлении не принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций.

Определение 2 [2]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (*по Тонкову*), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Это определение полным образом описывает содержание, вкладываемое в понятие «равномерная полная управляемость». Однако оно не дает эффективных способов установления равномерной полной управляемости системы (1), таких, каким обладает определение 1. Поэтому возникает вопрос о нахождении условий, аналогичных (2), на основании которых можно было бы говорить о наличии у линейной системы (1) с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными коэффициентами свойства равномерной полной управляемости. Изучению этого вопроса была посвящена статья [2], в которой для систем (1) было введено понятие свойства $H(\theta)$, эквивалентного определению 2.

В настоящей работе даны:

1) схожее с определением 1, понятие сигнум-равномерной полной управляемости системы (1), являющееся достаточным условием равномерной полной управляемости системы (1) в смысле определений 1 и 2;

2) утверждение (с условием, похожим на (2)), которое является критерием равномерной полной управляемости, в случае интегрируемости с квадратом матрицы B, и лишь необходимым условием, если матрица при управлении в системе (1) не принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций.

Для всякого числа $t \geqslant 0$ и произвольной матричной функции $D(t) = \{d_{ij}(t)\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ обозначим через $\operatorname{sign} D(t)$ матричную функцию вида $\operatorname{sign} D(t) = \{\operatorname{sign} d_{ij}(t)\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$, где $\operatorname{sign} : [0, +\infty) \to \{-1, 0, 1\}$ есть сигнум-функция, т. е. функция вида

$$\operatorname{sign} f(s) = \begin{cases} 1, & \text{при всех } s \text{ таких, что } f(s) > 0, \\ 0, & \text{при всех } s \text{ таких, что } f(s) = 0, \\ -1, & \text{при всех } s \text{ таких, что } f(s) < 0. \end{cases}$$

Определение 3. Система (1) называется *сигнум-равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\beta > 0$, что для любых числа $t_0 \geqslant 0$ и ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\xi^\top \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0, \tau) B(\tau) \operatorname{sign}\big(B^\top(\tau) X^\top(t_0, \tau)\big)\, d\tau\, \xi \geqslant \beta\|\xi\|^2. \tag{3}$$

Теорема 1. *а) Пусть матрица $B(\cdot)$ системы (1) является интегрируемой с квадратом матричной функцией. Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами сигнум-равномерно вполне управляема, то система (1) равномерно вполне управляема (по Калману).*

б) Пусть матрица $B(\cdot)$ системы (1) не интегрируема с квадратом. Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами сигнум-равномерно вполне управляема, то она является и равномерно вполне управляема (по Тонкову).

Теорема 2. *а) Пусть матрица $B(\cdot)$ является интегрируемой с квадратом матричной функцией. Система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ-равномерно вполне управляема, тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\delta > 0$, что для любых числа $t_0 \geqslant 0$ и вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^\top X(t_0, \tau) B(\tau) \operatorname{sign}\big(B^\top(\tau) X^\top(t_0, \tau)\xi\big)\, d\tau \geqslant \delta\|\xi\|. \tag{4}$$

б) Пусть матрица $B(\cdot)$ не интегрируема с квадратом. Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ-равномерно вполне *управляема в смысле определения* 2, *то найдутся такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\delta > 0$, *что для любых числа* $t_0 \geqslant 0$ *и вектора* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство* (4).

Замечание. В общем случае для любых вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $(n \times m)$-матрицы G верно неравенство $(\operatorname{sign} G)\,\xi \neq \operatorname{sign}(G\xi)$, поэтому левые части в неравенствах (3) и (4) не равны.

Литература

1. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
2. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
3. Зайцев В. А. *Критерий равномерной полной управляемости линейной системы* // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 157–179.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЧИСТНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

В.В. Крахотко[1], Г.П. Размыслович[1], В.В. Игнатенко[2]

[1] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
{krakhotko,razmysl}@bsu.by,
[2] Белорусский государственный технологический университет
ihnatsenko@tut.by

Рассмотрим систему управления

$$A_0 x(t+1) = Ax(t-h) + Bu(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(\cdot) = \{x(\tau) = q_\tau,\ \tau = -h, -h+1, \ldots, 0\}, \tag{2}$$

где x — n-вектор, u — r-вектор (управление), A_0, A, B — постоянные матрицы соответствующих размеров, h $(h > 1)$ — натуральное число (запаздывание), q_i, $i = \overline{-h, 0}$, — заданный n-вектор.

При $\det A_0 \neq 0$ система (1), (2) исследовалась в работе [1]. Поэтому будем считать, что $\det A_0 = 0$ и пучок матриц $\lambda A_0 - A$ является регулярным т. е. найдется $\tilde{\lambda} \in C$ такое, что $\det(\tilde{\lambda} A_0 - A) \neq 0$. В силу этого без ограничения общности, можно считать, что для матриц системы (1) выполняются условия $A_0 A = A A_0$, $\ker A_0 \cap \ker A = \{0\}$.

Определение 1. Обратной матрицей Дразина [2] к любой квадратной матрице A называется матрица A^D, которая удовлетворяет систем уравнений

$$A^D A = A A^D; \quad A^D A A^D = A^D; \quad A^D A^{k_0+1} = A^{k_0},$$

где $k_0 = \operatorname{ind} A$ — индекс матрицы A (наименьшее неотрицательное число, такое что $\operatorname{rank} A^{k_0+1} = \operatorname{rank} A^{k_0}$).

Определение 2. Начальное состояние $x_0(\cdot)$ назовем допустимым, если найдется управление $u(t)$, $t \geqslant 0$, такое, что система (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t \geqslant 0$.

Решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, системы (3) будем искать в виде $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, где $x_1(t) = A_0^D A_0 x(t)$, $x_2(t) = (E - A_0^D A_0) x(t)$, где A_0^D — обратная Дразина для матрицы A_0.

Умножая обе части системы (1) слева на A_0^D, получим:

$$A_0^D A_0 x(t+1) = A_0^D A x(t-h) + A_0^D B u(t)$$