Литература

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларус. навука, 2012.
2. Зайцев В. А. *Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами* // Вестн. Удмуртского ун-та. Сер. Математика. 2003.
3. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С МИНИМАЛЬНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЗАТРАТАМИ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь,
{kalininai,lavrinovich}@bsu.by

Численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В связи с этим возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи на задачи меньшей размерности.

В докладе рассматривается задача оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе, имеющая вид

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \tag{1}$$

$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \tag{2}$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} u'P(t)u\,dt \to \min, \tag{3}$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени $(t_* < t^*)$, y — вектор медленных переменных, z — вектор быстрых переменных, u — вектор управления, $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Предположение 1. Матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, 2\dots)$, если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(y,z,t,\mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (y_*,z_*,t_*), $(t_* < < t^*)$, имеет место $u^{(N)}(y_*,z_*,t_*,\mu) = u^{(N)}(t_*,\mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in[t_*,t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1)–(3).

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных — конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно, называемых базовыми. Первой из них является вырожденная задача:

$$\dot y = A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad y(t^*) = 0, \quad J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} (u'P(t)u)\,dt \to \min,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

Предположение 3. Динамическая система в первой базовой задаче является вполне управляемой.

Вторая базовая задача имеет вид:

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, \quad z(0) = -A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} (u'(s)P(t^*)u(s))\,ds \to \min,$$

где $u^0(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, — оптимальное управление в вырожденной задаче.

Предположение 4. Динамическая система во второй задаче является вполне управляемой.

Теорема. *При выполнении предположений* 1 – 4 *решению задачи* (1) – (3) *с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных* $(\psi_1^0(t,\mu),\psi_2^0(t,\mu))$, $t\in[t_*,t^*]$. *Величины* $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^*,\mu)$, $\nu(\mu) = \psi_2^0(t^*,\mu)$, *являющиеся определяющими элементами задачи* (1) – (3), *допускают асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k,$$

в которых $\nu_0 = \sigma_0 - (A_2(t^*)A_4^{-1}(t^*))^\top$, *а* λ_0, σ_0 *–– значения сопряженных переменных на правом конце траекторий соответственно в первой и второй базовых задачах.*

Доказательство теоремы является конструктивным и предопределяет дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений. В частности, вектор-функция

$$u^{(0)}(y,z,t,\mu) = -P^{-1}(t)(B_0^\top(t)F_0^\top(t) + B_2^\top(t)G^\top((t-t^*)/\mu)C_0)C_1^{-1}F_0(t)y$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Здесь $F_0(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, — $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot F_0 = -F_0A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n,$$

$G(s)$, $S \leqslant 0$, — $(m\times m)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m,$$

$$C_1 = \int\limits_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t)P^{-1}(t)\Phi_0^\top(t)\,dt, \quad \Phi_0(t) = F_0(t)B_0(t),$$

$$C_0 = C_3^{-1}A_4^{-1}B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^\top(t^*),$$

$$C_3 = \int\limits_{-\infty}^{0} (\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^\top(s))\,ds, \Pi\Phi(s) = G(s)B_2(t^*).$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.А. Козлов

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
kozlovaa@tut.by

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово векторное пространства с нормой $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ (здесь символ $^\top$ означает операцию транспонирования вектора или матрицы).

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Если матрица B принадлежит также и пространству интегрируемых с квадратом матричных функций, то имеет место

Определение 1 [1]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (*по Калману*), если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнено неравенство

$$\xi^\top \int_{t_0}^{t_1} X(t_0,\tau)B(\tau)B^\top(\tau)X^\top(t_0,\tau)\,d\tau\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2, \tag{2}$$

где $X(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (1) с нулевым управлением.

Очевидно, что данное определение выражено в терминах матрицы Коши $X(t,s)$ системы (1) с нулевым управлением и матрицы B при управлении. Поскольку матрица Коши абсолютно непрерывна, то вопрос о существовании интеграла в (2) сводится к вопросу интегрируемости с квадратом матрицы B. Если последняя не интегрируема с квадратом, то этот интеграл не существует, а, значит, для систем (1) с такой матрицей B определение 1 не имеет смысла. Е. Л. Тонковым [2] было введено иное определение равномерной полной управляемости, эквалентное определению 1 в случае интегрируемости с квадратом матрицы B, которое также имеет место и для случая, когда матрица при управлении не принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций.