СВОЙСТВО РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

И.В. Инц

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
i.ints@mail.ru

Рассмотрим линейную управляемую нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

у которой матрицы коэффициентов A и B локально интегрируемы и интегрально ограничены. Построив по принципу линейной обратной связи управление $u = U(t)x$, где U — измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица, перейдём от системы (1) к замкнутой системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Определение 1. [1, 2] Система (2) обладает *свойством равномерной глобальной достижимости*, если найдется такое число $\sigma > 0$, для которого при любом $r \geqslant 1$ существует величина $d = d(r) > 0$ такая, что для всякой $(n \times n)$-матрицы H, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant 1/r > 0$, и любого $t_0 \geqslant 0$ найдется на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ такое измеримое и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leqslant d$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + \sigma, t_0) = H$.

Замечание. В определении 1 под $\| \cdot \|$ понимается спектральная операторная норма матриц, то есть матричная норма, индуцированная евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$.

Известно, что задача о равномерной глобальной достижимости системы (2) является обобщением задачи глобальной ляпуновской приводимости [3] этой системы. В свою очередь последняя обобщает задачу о глобальном управлении показателями Ляпунова системы (2). Решение вышеуказанных задач в основном производится в предположении равномерной полной управляемости системы (1).

Определение 2. [3] Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Отдельные результаты по решению задачи равномерной глобальной достижимости были получены в работах В.А. Зайцева [2], Е.К. Макарова и С.Н. Поповой [1]. Так, например, для линейных нестационарных систем (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной матрицей B в предположении равномерной полной управляемости системы (1) доказана [1] равномерная глобальная достижимость для случая размерности фазового пространства $n = 2$. Общее же решение (для произвольной размерности n) данной задачи, даже для систем с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами, на сегодняшний день не найдено.

В настоящей работе дано обобщение статьи [2] на случай систем (2) с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами, т. е. доказана

Теорема 1. *Пусть* $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. *Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами* σ*-равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Литература

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларус. навука, 2012.

2. Зайцев В. А. *Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами* // Вестн. Удмуртского ун-та. Сер. Математика. 2003.

3. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С МИНИМАЛЬНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЗАТРАТАМИ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь,
{kalininai,lavrinovich}@bsu.by

Численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В связи с этим возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи на задачи меньшей размерности.

В докладе рассматривается задача оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе, имеющая вид

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \tag{1}$$

$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \tag{2}$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} u'P(t)u\,dt \to \min, \tag{3}$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени $(t_* < t^*)$, y — вектор медленных переменных, z — вектор быстрых переменных, u — вектор управления, $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Предположение 1. Матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, 2\ldots)$, если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.