Теорема. *Для того, чтобы функции* $x_1(t)$, $x_2(t)$, *являющиеся решением системы* (1) *задавали прямую* (2) *достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$u = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)k}{d_4-kd_2}x_1 - \frac{\lambda_2 m + kd_1 - d_3}{d_4-kd_2} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\frac{\lambda_2 m + kd_1 - d_3 - 1}{(\lambda_1-\lambda_2)k} \leqslant x_1 \leqslant \frac{\lambda_2 m + kd_1 - d_3 + 1}{(\lambda_1-\lambda_2)k}.$$

Вывод формулы, определяющей допустимое управление (3), проводится путем применения соотношения (2) для общего решения системы (1), представленного, например, в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.3.02»).

Литература

1. Гончарова М. Н. *Синтез оптимального быстродействия с фазовыми ограничениями для одного класса систем второго порядка* // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2012. № 3 (136). С. 53–59.

2. Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения.* М.: МАКС Пресс, 2007.

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЕ СТРАТЕГИИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.М. Дмитрук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
dmitrukn@bsu.by

Рассмотрим взаимосвязную систему, в которой поведение i-й подсистемы, $i \in I = \{1, 2, \dots, q\}$, описывается уравнением

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum\nolimits_{j \in I \setminus i} A_{ij} x_j + b_i u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad t \in T = [0, t_f]. \tag{1}$$

Здесь $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ — состояние i-й подсистемы в момент времени t; $u_i = u_i(t) \in \mathbb{R}$ — значение скалярного управляющего воздействия подсистемы i, $u_i(\cdot) \in L_2(T)$; $A_i = A_{ii}$, b_i, A_{ij}, $i, j \in I$, — заданные матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Предполагается, что не вырождены все матрицы вида $G_i = (B_i, AB_i, \dots, A^{n-1}B_i)$, $i \in I$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ — блочные матрицы, соответствующие системе (1), $i \in I$, записанной в виде $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $x = (x_1^\top, \dots, x_q^\top)^\top \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_q)^\top \in \mathbb{R}^q$; $n = \sum_{i \in I} n_i$; B_i — i-й столбец матрицы B.

Целью управления каждой подсистемой является ее перевод в начало координат $(x_i(t_f) = 0)$ и минимизация локального квадратичного функционала $J_i(u_i) = \int_0^{t_f} u_i^2(t)\,dt$.

Решение рассматриваемой задачи при централизованном управлении, когда управление осуществляется с помощью одного центрального регулятора, известно в виде линейной оптимальной обратной связи по состоянию [1]:

$$u^0(\tau, x) = K(\tau)x, \quad \tau \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $K(\tau)=K(\tau,\tau)$, $K(t,\tau)=-(F(t_f-t)B)^\top G^{-1}(\tau)F(t_f-\tau)$, $t\in T(\tau)=[\tau,t_f]$, $\tau\in T$; $F(t)=e^{At}$, $t\in T$; $G(\tau)=\int_\tau^{t_f}(F(t_f-t)B)(F(t_f-t)B)^\top dt$, $\tau\in T$.

В докладе исследуется случай, когда централизованное управление системой (1), $i\in I$, невозможно из-за отсутствия центрального регулятора и наличия в канале обмена информацией между подсистемами постоянного запаздывания $\theta>0$. В таком случае одним из подходов к управлению системой (1), $i\in I$, является децентрализованное управление [2].

Предполагается, что каждая подсистема имеет собственный локальный регулятор, который в момент времени $\tau\in T$ получает полные и точные измерения текущего собственного состояния $x_i^*(\tau)$ и состояний всех остальных объектов $x_k^*(\tau-\theta)$, $k\in I\setminus i$, в которых они находились в момент времени $\tau-\theta$. Здесь и далее «$*$» отмечает состояние x_i^* реального объекта управления, который в отличие от его детерминированной модели (1), используемой регулятором, описывается дифференциальным уравнением с неизвестным возмущением

$$\dot{x}_i^*(t)=A_ix_i^*(t)+\sum\nolimits_{j\in I\setminus i}A_{ij}x_j^*(t)+b_iu_i^*(t)+d_iw^*(t),\quad x_i^*(0)=x_{i0},\tag{2}$$

где $w^*(t)\in\mathbb{R}$, $|w^*(t)|\leqslant w_{\max}$, $t\in T$, — ограниченные кусочно-непрерывные возмущения.

Согласно [2], алгоритм децентрализованного управления состоит в следующем. В каждый момент времени $\tau\in T$ регулятор подсистемы i решает локальную задачу оптимального управления $\mathcal{P}_i(\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta))$, сформированную по известной к этому моменту информации. Пусть $u_i^d(\cdot|\tau)=u_i^d(\cdot|\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta))$ — решение задачи $\mathcal{P}_i(\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta))$. На вход i-ой подсистемы в конкретном процессе управления (2) подается управляющее воздействие $u_i^*(\tau)=u_i^d(\tau|\tau)$, $\tau\in T$.

Предложена следующая формулировка локальной задачи оптимального управления:

$$\mathcal{P}_i(\tau,x_i^*(\tau),x^*(\tau-\theta)):\quad J_i^d(\tau)=\min_{u_i}\int\limits_\tau^{t_f}u_i^2(t)\,dt,$$

$$\dot{x}_i=A_ix_i+\sum\nolimits_{j\in I\setminus i}A_{ij}x_j+b_iu_i,\quad \dot{x}_k=A_kx_k+\sum\nolimits_{j\in I\setminus k}A_{kj}x_j,\quad k\in I\setminus i,\tag{3}$$
$$x_i(\tau)=x_i^*(\tau),\quad x_k(\tau)=0,\quad k\in I\setminus i,\quad x(t_f)=g_i^0(\tau).$$

Здесь $g_i^0(\tau)=F_i(t_f-\tau)x_i^d(\tau|\tau-\theta)-G_i(\tau)G^{-1}(\tau)F(t_f-\tau)x^d(\tau|\tau-\theta)$, $F_i(t)\in\mathbb{R}^{n\times n_i}$ — соответствующий подсистеме i блок матрицы $F(t)=(F_1(t),\dots,F_q(t))$, $t\in T$;

$$G_i(\tau)=\int\limits_\tau^{t_f}(F_i(t_f-t)b_i)(F_i(t_f-t)b_i)^\top\,dt,\quad \tau\in T,$$

$x^d(\tau|\tau-\theta)=x(\tau|\tau-\theta,x^*(\tau-\theta),u^d(\cdot|\tau-\theta))$ — прогнозное состояние в текущий момент времени τ детерминированной системы (1), $i\in I$, с начальным состоянием $x(\tau-\theta)=x^*(\tau-\theta)$ и под действием управления $u^d(\cdot|\tau-\theta)=(u_i^d(\cdot|\tau-\theta),i\in I)$; $x^d(\tau|\tau-\theta)=x^d(\tau|0)$ при $\tau<\theta$.

Оптимальная программа задачи (3) имеет вид

$$u_i^d(t|\tau)=k_i(t,\tau)^\top x^d(\tau|\tau-\theta)+k_i^0(t,\tau)^\top(x_i^*(\tau)-x_i^d(\tau|\tau-\theta)),\quad t\in T(\tau),$$

где $k_i^0(t,\tau)^\top=-(F_i(t_f-t)b_i)^\top G_i^{-1}(\tau)F_i(t_f-\tau)$, $k_i(t,\tau)^\top$ — i-я строка матрицы $K(t,\tau)$, $i\in I$.

Из решений $u_i^d(\cdot|\tau)$, $i\in I$, составим агрегированную децентрализованную программу:

$$u^d(t|\tau)=(u_i^d(\cdot|\tau),i\in I)=K_0(t,\tau)x^*(\tau)+(K(t,\tau)-K_0(t,\tau))x^d(\tau|\tau-\theta),\ t\in T(\tau),\tag{4}$$

где $K_0(t,\tau)$ — блочно-диагональная матрица, составленная из строк $k_i^0(t,\tau)^\top$, $i\in I$.

Если модель (1), $i \in I,$ точно описывает поведение реального объекта управления, т. е. $w^*(t) \equiv 0,$ $t \in T,$ то децентрализованная программа (3) совпадает с оптимальной централизованной программой $u^0(t|\tau) = K(t|\tau)x^*(\tau),$ $t \in T(\tau).$ В противном случае справедливы

Утверждение 1. *При любом состоянии* $x^*(\tau)$ *объекта управления агрегированная децентрализованная программа* (4) *переводит взаимосвязную систему* (1), $i \in I,$ *в начало координат:* $x_i(t_f|\tau, x^*(\tau), u^d(\cdot|\tau)) = 0,$ $i \in I.$

Утверждение 2. *Имеет место следующая оценка отклонения значения критерия качества* $J^d(\tau) = \sum_{i \in I} J_i^d(\tau)$ *на агрегированной децентрализованной программе* (4) *от оптимального значения* $J^0(\tau) = \int_\tau^{t_f} ||u^0(t|\tau)||^2\, dt:$

$$J^d(\tau) - J^0(\tau) \leqslant \lambda_{\max}(S(\tau)Q(\tau))w_{\max}^2\theta,$$

где $\lambda_{\max}(S(\tau)Q(\tau))$ *— максимальное собственное значение матрицы* $S(\tau)Q(\tau),$

$$Q(\tau) = \int\limits_\tau^{t_f} (K(t,\tau) - K_0(t,\tau))^\top (K(t,\tau) - K_0(t,\tau))\, dt, \quad S(\tau) = \int\limits_{\tau-\theta}^{\tau} F(\tau - t)d(F(\tau - t)d)^\top\, dt.$$

Из (3) следует общий вид децентрализованной обратной связи, линейной по $\mathbf{z}_\tau = (x(\tau)^\top, x(\tau-\theta)^\top, \ldots, x(\tau - l\theta)^\top)^\top,$ $l = \lceil tf/\theta \rceil:$

$$u^d(\tau, \mathbf{z}_\tau) = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{z}_\tau, \quad \mathbf{z}_\tau \in \mathbb{R}^{ln}, \quad \tau \in T,$$

где $x(t) \equiv x_0,$ $t \leqslant 0;$ $\mathbf{K}(\tau) = (K_0(\tau), K_1(\tau), \ldots, K_l(\tau));$ $K_j(\tau) \in \mathbb{R}^{r\times n},$ их компоненты имеют порядок $O(\theta^{j-1}),$ $j = \overline{1, l}.$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований (грант Ф14МС-005).

Литература

1. Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.
2. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. *Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 4. С. 593—609.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ — ДИФФУЗИИ

Я.Б. Задворный

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $f(t, x)$ — полунепрерывная полудинамическая система на этом пространстве.

Множество $B_0 \subseteq X$ называется поглощающим множеством полунепрерывной полудинамической системы $f(t, x),$ если для любого ограниченного множества $B \subseteq X$ существует момент времени $T \geqslant 0,$ для которого $f(t, B) \subseteq B_0$ $\forall t \geqslant T.$

Непустое множество $U \subseteq X$ называется аттрактором полунепрерывной полудинамической системы $f(t, x),$ если оно обладает следующими свойствами: $U_1)$ U компактно; $U_2)$ для любого ограниченного множества $B \subseteq X$ выполнено $\beta(f(t, B), U) \to 0$ при $t \to +\infty;$ $U_3)$ U инвариантно, то есть $f(t, U) = U$ $\forall t \geqslant 0.$