$$u(\cdot) \in \mathbb{R}, \quad x(\cdot) \in \mathbb{R}^n, \quad S, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i = 0, 1 \tag{1}$$

при воздействии линейной обратной связи

$$u(t) = q_0' x(t) + q_1' x(t-h), \quad q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

В работе [1] представлены достаточные условия двумерных систем в случае разрешимости относительно производной, полученные с использованием канонических форм для систем с запаздыванием, рассмотрены конструктивные алгоритмы построения регуляторов по параметрам исходной системы, не требующие знания характеристических значений. Исследуются также дескрипторные системы с запаздыванием при воздействии регуляторов различных типов для случая, когда исходная система оказывается неразрешимой относительно производной. Если $\det[b, Sb] \neq 0$, то найдется такая матрица $D$, что преобразование $x = Dy$ упрощает исходную систему и приводит ее к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t-h) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t).$$

Далее проводится исследование возможности стабилизации в зависимости от значений элементов полученных матриц. Для обеспечения асимптотической устойчивости и получения достаточных условий стабилизируемости используются условия, при которых отрицательны действительные части корней квазиполинома $\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h}$.

**Утверждение.** *Для* $Sx(t)$ *-стабилизируемости системы* (1) *регулятором вида* (2) *достаточно, чтобы выполнялось условие* $\det[b, Sb] \neq 0$ *и при этом* $\alpha_{11}$ *было отлично от нуля. В случае* $\det[b, Sb] \neq 0$, $\alpha_{11} = 0$ *систему можно стабилизировать либо если* $\alpha_{11}^1 = 0$ *и точка* $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega$ *либо если* $\alpha_{11}^1 \neq 0$ *(граница области* $\Omega$ *описывается линиями:* $\beta = -\alpha$, $\alpha + \beta\cos(hg) = 0$, $g - \beta\sin(hg) = 0$, $0 < g < \pi/h$).

Разработаны алгоритмы построения линейной обратной связи в виде разностных регуляторов вида (2) для обеспечения $Sx(t)$-асимптотической устойчивости замкнутой системы. Представлены утверждения, относящиеся к стабилизируемости двумерных дескрипторных систем при любых значениях запаздывания $h$.

### Литература

1. Борковская И. М. *Достаточные условия стабилизируемости дескрипторных систем с запаздыванием в двумерном случае.* // Тр. БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. 2010. Вып. XVIII. С. 27–30.

## О СВЯЗИ БАЗИСОВ ГРЁБНЕРА И ЛЯПУНОВА

**В.Т. Борухов**

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

borukhov@im.bas-net.by

Рассмотрим множество $\mathbb{K}[x]$ полиномов вида $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$, где $f_\alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ — поле, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$,

$$\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \geqslant 0\}$$

— полугруппа относительно операции сложения векторов. Мультистепень *multidegf* полинома $f$ равна

$$\max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \mid f_\alpha \neq 0\},$$

где максимум берется по отношению мономиального порядка $\prec$ на $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, согласованного с операцией сложения в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ [1, 2].

Множество $\mathbb{K}[x]$ стандартным образом наделяется структурой кольца, при этом, если

$$G := \{g_1, \ldots, g_k\} \subset \mathbb{K}[x] \backslash \{0\},$$

то линейная оболочка $I = I(G)$ множества $G$ над кольцом $\mathbb{K}[x]$ является идеалом кольца $\mathbb{K}[x]$. Для приложений важна задача преобразования производящего множества $G$ в базис Грёбнера идеала $I$, вполне упорядоченного отношением $\prec$ [1]. В частности, базисы Грёбнера используются в качественной теории дифференциальных уравнений.

Множество $\mathbb{K}[x]$ можно наделить также структурой векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. При этом идеал $I$ является подпространством пространства $\mathbb{K}[x]$.

Полагая $\lambda_I(0) = -\infty$, $\lambda_I(f) =$ *multidegf* при $f \neq 0$, определим функционал

$$\lambda_I : I \to \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \cup \{-\infty\},$$

который, как нетрудно заметить, относится к классу фундированных функционалов Ляпунова — Богданова [3]. Здесь $I$ рассматривается как векторное пространство, $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ — как вполне упорядоченное отношением $\prec$ множество, $-\infty \prec \alpha\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Напомним [2], что октантом $O^n(a)$ с вершиной в точке $a \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ называется множество, состоящее из элементов полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, представимых в виде $\alpha = a + \beta$ для какого-то элемента $\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Обозначим через $|\lambda_I|$ множество значений функционала $\lambda_I$ и положим $M_I := |\lambda_I| \backslash \{-\infty\}$. Из монографии [2] следует

**Лемма 1**. *Множество $M_I$ является объединением конечного числа октантов вида $O^n(a)$ (идеалом в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ [2]).*

Из теории фундированных функционалов Ляпунова — Богданова [3, 4] следует существование специальных алгебраических базисов (базисов Ляпунова) векторного пространства $I$. Алгебраический базис $H$ векторного пространства $X$ называется базисом Ляпунова (относительно функционала Ляпунова — Богданова $\lambda$), если значение $\lambda$ на любой конечной с отличными от нуля коэффициентами линейной комбинации векторов из $H$ равно наибольшему значению $\lambda$ на векторах, участвующих в линейной комбинации.

Определение базиса Грёбнера в терминах функционала $\lambda_I$ звучит так. Множество $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ называется базисом Грёбнера, если справедливо равенство $|\lambda_I| = |\lambda_{I_0}|$, где $I_0 = I_0(G_0)$, $G_0 = \{x^{\lambda_I(g_1)}, \ldots, x^{\lambda_I(g_k)}\}$. Если, кроме того, разность

$$\lambda_I(g_i) - \lambda_I(g_j)$$

не принадлежит $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ при $i \neq j$ и $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$, то $G$ является минимальным базисом Грёбнера.

Связь между базисами Ляпунова и базисами Грёбнера описывается в следующих теоремах.

**Теорема 1**. *Пусть $\{a_i | i = \overline{1, m}\}$ — множество вершин представления множества $M_I$, указанного в лемме 1, полином $b_i$ — решение уравнения $\lambda_I(b_i) = a_i$. Тогда $\{b_i | i = \overline{1, m}\}$ — минимальный базис Грёбнера идеала $I$.*

**Теорема 2**. *Минимальный базис Грёбнера допускает продолжение до базиса Ляпунова (является множеством Ляпунова [3]).*

**Определение 1**. Оснащенным октантом $\tilde{O}^n(b)$ с вершиной в точке $b \in \mathbb{K}[x]$ назовем множество

$$\tilde{O}^n(b) = \left\{ b(x) x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \right\}.$$

Пусть задан минимальный базис Грёбнера $B = \{b_i | i = \overline{1, m}\}$. Определим множество

$$A(B) = \bigcup_{i=\overline{1,m}} \tilde{O}^n(b_i).$$

Сужение функционала $\lambda_I$ на множество $A(B)$ обозначим символом $\lambda_{IA}$.

**Теорема 3**. *Область значений произвольного биективного сечения многозначного отображения* $\lambda_{IA}^{-1} : |\lambda_I| \to A(B)$ *является базисом Ляпунова.*

В сообщении обсуждается задача построения указанных в теореме 3 биективных сечений.

В общем случае для построения базиса Ляпунова по производящему множеству $G$ применяется предложенная Ляпуновым понижающая процедура. Формализация процедуры Ляпунова для класса фундированных функционалов Ляпунова — Богданова представлена в работе [4]. Специализация этой процедуры для функционала $\lambda_I$ приводит к алгоритму Бухбергера [1]. В частности, применение $S$-многочленов в алгоритме Бухбергера можно интерпретировать как понижающую процедуру.

**Литература**

1. Cox D., Little J., O'Shea. *Ideals, varieties and algorithms.* Springer-Verlag, 1991.

2. Хованский А. Г., Чулков С. П. *Геометрия полугруппы* $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. *Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уранениям.* М.: МЦНМО, 2006.

3. Борухов В. Т. *Базисы Ляпунова и максимальные* $\lambda$*-подпространства* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1019–1028.

4. Борухов В. Т. *Редукция полного множества к базису Ляпунова фундированного функционала Ляпунова — Богданова* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 6. С. 24–27.

# УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРИЗИРУЕМОСТИ ОБЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВХОДАМИ

**В.И. Булатов**

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
Bulatov@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему

$$D(p)x(t) = Bu(t), \tag{1}$$

с выходом

$$y = Cx(t), \tag{2}$$

записанную в операторном виде. Здесь $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $x - n$ — вектор состояния; $u - r$ — вектор управления; $y - m$ — вектор; $D(\lambda) - n \times n$ — матрица, элементами которой являются целые функции комплексной переменной $\lambda$; $B - n \times r$ — матрица; $C - m \times n$ — матрица.

В исследованиях систем вида (1), (2) важную роль играет спектр этих систем, т. е. множество корней ( с учетом их кратностей) характеристической функции $d(\lambda) = \det D(\lambda)$, которая предполагается ненулевой. Если $d(\lambda) \equiv 0$, то возникает задача регуляризируемости системы (1), (2), т. е. например, с помощью регулятора по выходу $u = Qy(t)$ приведения этой системы к системе

$$\bigl(D(p) - BQC\bigr)x(t) = 0,$$