

В. А. ЕРОВЕНКО, М. В. МАРТОН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАТО ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НА СУЩЕСТВЕННО ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, г. Минск

Хорошо известно, что, согласно теореме Гольдмана, свойство нормальной разрешимости операторов неустойчиво при возмущениях. Работа посвящена анализу дополнительных условий на операторы с замкнутой областью значений и бесконечномерным ядром и коядром, для которых сохраняется свойство замкнутости области значений при компактных возмущениях. А именно, рассматривается подкласс нормально разрешимых операторов – существенно полурегулярных операторов.

Пусть X – комплексное банахово пространство и $T \in \mathbf{B}(X)$ – ограниченный линейный оператор с областью определения X и областью значений $R(T) \subset X$. Для оператора T определим следующие числовые характеристики: $\text{nul}(T) := \dim N(T)$, где $N(T) := \{x \in X: Tx = 0\}$ – ядро оператора T ; $\text{def}(T) := \text{codim} R(T) = \dim(X / R(T))$ – дефект оператора T (размерность коядра); $\text{ind}(T) := \text{nul}(T) - \text{def}(T)$ – индекс оператора T .

Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется *верхним полуфредгольмовым* (нижним полуфредгольмовым) и обозначается $\Phi^+(X)$ (соответственно $\Phi^-(X)$), если

$$T \in \Phi^+(X) := \{T \in \mathbf{B}(X): \overline{R(T)} = R(T), \text{nul}(T) < \infty\}$$
$$(T \in \Phi^-(X) := \{T \in \mathbf{B}(X): \overline{R(T)} = R(T), \text{def}(T) < \infty\}).$$

Обозначим *обобщенное ядро* оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ через

$$N^\infty(T) := \cup \{N(T^k): k=1, 2, \dots\}$$

и *обобщенную область значений* оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ через

$$R^\infty(T) := \cap \{R(T^k): k=1, 2, \dots\}.$$

Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется *полурегулярным*, если его область значений замкнута, $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется включение $N(T) \subset R^\infty(T)$. Простейшими примерами полурегулярных операторов в $T \in \mathbf{B}(X)$ являются ограниченные снизу операторы и суръективные операторы. В терминах состояний Тейлора-Халберга последние классы операторов можно описать, соответственно, как $T \in 1$ и $T \in I$ (см. определения в [1]).

Следует отметить, что включение $N(T) \subset R^\infty(T)$ эквивалентно другим включениям, которые можно описать в терминах обобщенного ядра и области значений или обобщенной области значений:

$$N(T) \subset R^\infty(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset R^\infty(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset R(T).$$

Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$, следуя Мюллеру [2, определение 3.2] будем называть *существенно полурегулярным*, если его область значений замкнута, т.е. $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется включение $N(T) \subset_e R^\infty(T)$, т.е. если размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений $R^\infty(T)$ конечна, а именно, если $k(T) := \dim [N(T) / (N(T) \cap R^\infty(T))] < \infty$.

Заметим, что если имеет место включение $N(T) \subset_e R^\infty(T)$, то для числа $k := k(T)$, в соответствии с терминологией Каашука, оператор T обладает свойством $P(S; k)$ для $S = I$ [3, определение 2.1], а в терминологии Грабинера, в силу теоремы 3.7 (b) из [4], оператор T имеет почти равномерный спуск k .

Отметим, что полурегулярные и полуфредгольмовы операторы являются существенно полурегулярными. Обратное, вообще говоря, неверно. На контрпримере можно показать, что существуют существенно полурегулярные операторы, которые не являются полуфредгольмовыми операторами, т.е. класс существенно полурегулярных операторов шире класса полуфредгольмовых операторов.

К о н т р п р и м е р 1. Пусть H – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_{ij} : i, j \text{ – целые, } i \geq 1\}$, на котором определен ограниченный оператор T с помощью равенств $Te_{i0} = 0$, $Te_{ij} = e_{ij-1}$, для $j \neq 0$. Тогда $N(T) = \overline{L}\{e_{i0} : i \geq 1\}$, $N(T) \subset R^\infty(T)$ и $\overline{R(T)} = R(T)$, т.е. T – полурегулярный оператор и, следовательно, существенно полурегулярный. Так как размерность ядра и коядра оператора бесконечна, тогда оператор T не является полуфредгольмовым.

Известно, что для полуфредгольмовых операторов справедливы теоремы Като об устойчивости свойства полуфредгольмовости, даже с сохранением индекса, при малых по норме и при компактных возмущениях оператора (теорема IV.5.26 в [5]).

Т е о р е м а 1. Пусть X и Y – банаховы пространства и оператор $T \in \mathbf{B}(X, Y)$ – полуфредгольмов. Если линейный оператор A – компактный, действующий из X в Y , то тогда $T + A \in \mathbf{B}(X, Y)$ – полуфредгольмов оператор и $\text{ind}(T + A) = \text{ind}(T)$.

Сформулируем теорему, в которой описаны известные свойства полуфредгольмовых операторов (теорема 6.12.2 [6]), и которая будет использоваться в доказательстве основного результата работы, а именно теоремы 3.

Т е о р е м а 2. Если X, Y, Z – банаховы пространства, оператор $T \in \mathbf{B}(X, Y)$, а оператор $S \in \mathbf{B}(Y, Z)$, тогда

1. S, T – верхние полуфредгольмовы $\Rightarrow ST$ – верхний полуфредгольмов;
2. ST – верхний полуфредгольмов $\Rightarrow T$ – верхний полуфредгольмов;
3. S, T – нижние полуфредгольмовы $\Rightarrow ST$ – нижний полуфредгольмов;
4. ST – нижний полуфредгольмов $\Rightarrow S$ – нижний полуфредгольмов;

Если оператор $K \in \mathbf{B}(X, Y)$ компактный, то верны следующие утверждения:

5. T – верхний полуфредгольмов, K компактный $\Rightarrow T + K$ – верхний полуфредгольмов;

6. T – нижний полуфредгольмов, K компактный $\Rightarrow T + K$ – нижний полуфредгольмов.

Рассмотрим несколько вспомогательных утверждений необходимых для доказательства основного результата работы и введем следующие определения.

Пусть M – некоторое подпространство векторного пространства X . Для каждого элемента $x \in X$ обозначим через $\pi(x)$ класс смежности пространства X по M , содержащий x , иными словами $\pi(x) = \{x + m : m \in M\} = x + M$.

Факторпространством пространства X по подпространству M , обозначается X/M , называется пространство, элементами которого являются классы смежности по подпространству M .

Линейное отображение $\pi: X \rightarrow X/M$ называется каноническим отображением (или факторотображением).

Для ограниченного линейного оператора T на банаховом пространстве X и пусть M – некоторое его подпространство, $M \subset X$, обозначим сужение оператора T на подпространство M через $T|_M$, то есть $(T|_M)x = Tx$ для $x \in M$.

В следующей известной лемме дается эквивалентная формулировка существенно полурегулярного оператора в терминах полуфредгольмовых операторов.

Л е м м а 1. Пусть T ограниченный линейный оператор на банаховом пространстве X , то есть $T \in \mathbf{B}(X)$. Следующие утверждения эквивалентны.

а) T – существенно полурегулярный;

б) Существует замкнутое подпространство $M \subset X$ такое что $TM = M$ и сужение оператора $T|_M$ – является нижним полуфредгольмовым оператором, а фактороператор $T/M: X/M \rightarrow X/M$ является верхним полуфредгольмовым.

Доказательство этой леммы смотри, например в [7 лемма 1, 8 лемма 1].

При доказательстве основного результата работы используются следующие свойства спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма [9, лемма 15].

Л е м м а 2. Пусть T ограниченный линейный фредгольмов оператор в банаховом пространстве X , то есть $T \in \Phi(X)$ и пусть M замкнутое подпространство пространства X такое, что $T(M) \subset M$. Тогда для спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма справедливы неравенства

$$r_e(T|_M) \leq r_e(T) \text{ и } r_e(T/M) \leq r_e(T),$$

где T/M – фактороператор, порожденный оператором T на факторпространстве X/M .

Для доказательства сформулированного в следующей теореме результата понадобится вспомогательное рассуждение, сформулированное ниже в лемме 3, справедливое для любого оператора $T \in \mathbf{B}(X)$. Напомним, что класс полуфредгольмовых операторов с конечномерным ядром, т.е. $\Phi^+(X)$, и класс полуфредгольмовых операторов с конечной коразмерностью области значений, т.е. $\Phi^-(X)$, являются открытыми подмножествами в банаховом пространстве $\mathbf{B}(X)$ и, следовательно, их дополнения $\mathbf{B}(X) \setminus \Phi^+(X)$ и $\mathbf{B}(X) \setminus \Phi^-(X)$ – замкнутые

подмножества. Рассмотрим следующие числовые характеристики для любого оператора $T \in \mathbf{B}(X)$

$$\begin{aligned} d_+(T) &= \text{dist} (T, \mathbf{B}(X) \setminus \Phi^+(X)), \\ d_-(T) &= \text{dist} (T, \mathbf{B}(X) \setminus \Phi^-(X)). \end{aligned}$$

Заметим, что оператор $T \in \Phi^+(X)$ тогда и только тогда, когда $d_+(T) > 0$ и оператор $T \in \Phi^-(X)$ тогда и только тогда, когда $d_-(T) > 0$. Определим полуфредгольмовы радиусы $r_+(T)$ и $r_-(T)$ для оператора T следующим образом

$$\begin{aligned} r_+(T) &= \sup \{ \varepsilon \geq 0: T - \lambda I \in \Phi^+(X) \text{ для } |\lambda| < \varepsilon \}, \\ r_-(T) &= \sup \{ \varepsilon \geq 0: T - \lambda I \in \Phi^-(X) \text{ для } |\lambda| < \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $r_+(T) \geq d_+(T)$ и $r_-(T) \geq d_-(T)$. В дальнейшем нам понадобится аналог формулы спектрального радиуса, полученный Я. Земанеком (смотри теорему 1 в [10]), для полуфредгольмовых радиусов $r_+(T)$ и $r_-(T)$, а именно для любого оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} r_+(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_+(T^n)^{1/n} = \sup_n d_+(T^n)^{1/n}, \\ r_-(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_-(T^n)^{1/n} = \sup_n d_-(T^n)^{1/n}. \end{aligned}$$

Покажем теперь справедливость следующей вспомогательной леммы.

Л е м м а 3. Пусть $T, S \in \mathbf{B}(X)$ и $TS = ST$, тогда если $T \in \Phi^+(X)$ и $r_e(S) < r_+(T)$, то тогда $T + S \in \Phi^+(X)$, а если $T \in \Phi^-(X)$ и $r_e(S) < r_-(T)$, то тогда $T + S \in \Phi^-(X)$.

Доказательство. Действительно, из строгого неравенства $r_e(S) < r_+(T)$ и формул для спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма $r_e(S)$ и полуфредгольмового радиуса $r_+(T)$ следует, что существует такое нечетное n , что $\| \pi(S^n) \| < d_+(T^n)$, где через π обозначено каноническое отображение из $\mathbf{B}(X)$ в алгебру Калкина $\mathbf{B}(X) / \mathbf{K}(X)$, где $\mathbf{K}(X)$ — множество компактных операторов на банаховом пространстве X , и $\pi(T) = T + \mathbf{K}(X)$, для $T \in \mathbf{B}(X)$. Кроме того, по определению, норма элемента $\pi(S^n)$ в фактор-алгебре $\mathbf{B}(X) / \mathbf{K}(X)$ равна

$$\| \pi(S^n) \| = \inf_{K \in \mathbf{K}(X)} \| S^n + K \|,$$

поэтому из строгого неравенства $\| \pi(S^n) \| < d_+(T^n)$ и определения $\inf$ в формуле для $\| \pi(S^n) \|$ следует, что найдется такой компактный оператор K_0 , что $\| S^n + K_0 \| < d_+(T^n)$. Из последнего неравенства следует, что

$$0 < d_+(T^n) - \| S^n + K_0 \| \leq d_+(T^n + S^n + K).$$

Поскольку $d_+(T^n + S^n + K) > 0$, тогда оператор $T^n + S^n + K \in \Phi^+(X)$ и, следовательно, по свойству устойчивости полуфредгольмовых операторов относительно компактных возмущений (смотри теорему 1) имеем, что

$T^n + S^n \in \Phi^+(X)$. Пользуясь условием коммутруемости операторов T и S , $TS = ST$, получим следующее равенство для нечетного n :

$$T^n + S^n = (T^{n-1} - ST^{n-2} + \dots + S^{n-1})(T + S).$$

Заметим, что если $T_1, T_2 \in \mathbf{B}(X)$ и $T_2 T_1 \in \Phi^+(X)$, соответственно, $T_2 T_1 \in \Phi^-(X)$, то тогда $T_1 \in \Phi^+(X)$, соответственно, $T_2 \in \Phi^-(X)$ (смотри теорему 2). Поэтому из последнего равенства получаем, что $T + S \in \Phi^+(X)$. Для доказательства того, что если $T \in \Phi^-(X)$ и $r_e(S) < r_-(T)$, то $T + S \in \Phi^-(X)$, достаточно заметить, что для сопряженного оператора $T' \in \Phi^+(X')$ и $T'S' = S'T'$, а $r_e(S') = r_e(S)$ и $r_+(S') = r_-(S)$, поэтому по ранее доказанному имеем, что $T' + S' \in \Phi^+(X')$ и, следовательно, $T + S \in \Phi^-(X)$. Лемма доказана.

Основной целью данной работы является анализ некоторых обобщений теорем устойчивости Като на существенно полурегулярные операторы, поскольку класс существенно полурегулярных операторов занимает промежуточное положение между нормально разрешимыми и полуфредгольмовыми операторами. Известно, что для полуфредгольмовых операторов справедливы теоремы Като об устойчивости свойства полуфредгольмовости, даже с сохранением индекса, при малых по норме и при компактных возмущениях оператора. Для того, чтобы возмущенный оператор $T+S$ где $S \in \mathbf{B}(X)$ – достаточно малый по норме или компактный оператор, обладал теми же свойствами, что и существенно полурегулярный оператор T , необходимо было наложить на оператор S дополнительное ограничение. Таким ограничением явилось требование перестановочности операторов T и S .

Докажем основной результат работы, в котором получена характеристика для возмущения оператора, при которой сохраняется свойство существенной полурегулярности, а значит и замкнутости области значений.

Т е о р е м а 3. Пусть T и S ограниченные линейные коммутирующие операторы, то есть $T, S \in \mathbf{B}(X)$ и $TS = ST$, и пусть T – существенно полурегулярный оператор. Существует такое $\varepsilon(T) > 0$, что если для спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма оператора S выполняется неравенство $r_e(S) < \varepsilon(T)$, то тогда оператор $T + S$ также существенно полурегулярный.

Доказательство. Обозначим сужение оператора T на подпространство $R^\infty(T)$ через $T|_{R^\infty(T)}$, то есть $T|_{R^\infty(T)} x = Tx$ для $x \in R^\infty(T)$, а фактороператор, порожденный оператором T на факторпространстве $X/R^\infty(T)$ через $T/R^\infty(T)$, то есть $T/R^\infty(T)[x] = [Tx]$ для $[x] \in X/R^\infty(T)$, где $[x]$ означает элемент факторпространства $X/R^\infty(T)$ и называется смежным классом линейного подпространства $R^\infty(T)$. Так как оператор T существенно полурегулярный, то по лемме 1, дающей эквивалентную характеристику существенно полурегулярных операторов в терминах операторов сужения и фактороператоров, имеем, что $T|_{R^\infty(T)} \in \Phi^-(X)$ и $T/R^\infty(T) \in \Phi^+(X)$, то есть введенные в доказательстве теоремы операторы являются полуфредгольмовыми. Так как операторы T и S коммутируют,

$TS = ST$, то справедливо включение $SR^\infty(T) \subset R^\infty(T)$, то есть замкнутое подпространство $R^\infty(T) \subset X$ инвариантно относительно оператора S , поэтому можно определить сужение оператора $S|_{R^\infty(T)}$ и фактороператор $S/R^\infty(T)$. Очевидно, что условие коммутативности для операторов $T|_{R^\infty(T)}$, $S|_{R^\infty(T)}$ и $T/R^\infty(T)$, $S/R^\infty(T)$ сохраняются,

$$(T|_{R^\infty(T)})(S|_{R^\infty(T)}) = (S|_{R^\infty(T)})(T|_{R^\infty(T)}),$$

$$(T/R^\infty(T))(S/R^\infty(T)) = (S/R^\infty(T))(T/R^\infty(T)).$$

По лемме 2 для спектральных радиусов существенного спектра Фредгольма оператора S , его сужения $S|_{R^\infty(T)}$ и фактороператора $S/R^\infty(T)$, порожденного оператором S , справедливы неравенства

$$r_e(S|_{R^\infty(T)}) \leq r_e(S) \quad \text{и} \quad r_e(S/R^\infty(T)) \leq r_e(S).$$

Используем полученный в лемме 3 результат для полуфредгольмовых операторов $T|_{R^\infty(T)} \in \Phi^-(X)$ и $T/R^\infty(T) \in \Phi^+(X)$, используемых для доказательства утверждения теоремы. Возьмем в качестве $\varepsilon(T)$ из формулировки теоремы число

$$\varepsilon(T) = \min \{ r_-(T|_{R^\infty(T)}), r_+(T/R^\infty(T)) \}.$$

Тогда в силу доказанного выше вспомогательного утверждения следует, что $T|_{R^\infty(T)} + S|_{R^\infty(T)}$ – оператор класса $\Phi^-(R^\infty(T))$, а $T/R^\infty(T) + S/R^\infty(T)$ – оператор класса $\Phi^+(X/R^\infty(T))$. Таким образом по лемме 1 оператор $T + S$ является существенно полурегулярным. Теорема доказана.

Отметим существенность условия перестановочности операторов T и S для устойчивости свойства замкнутости области значений, даже при наличии свойства $N(T) \subset_\varepsilon R^\infty(T)$, в теореме 3. Для соответствующего примера можно воспользоваться аналогами операторов из примера 2.5 [9], с помощью которых было показано, что множество всех полурегулярных операторов не является открытым.

К о н т р п р и м е р 2. Пусть H – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_{ij}: i, j \text{ – целые, } i \geq 1\}$, на котором определены ограниченные операторы T и S с помощью равенств $Te_{i0} = 0$, $Se_{i0} = (\varepsilon/i)e_{i1}$ и $Te_{ij} = e_{ij-1}$, $Se_{ij} = 0$, для $j \neq 0$. Тогда $\|S\| = \varepsilon$, $TS \neq ST$, $N(T) = \overline{L}\{e_{i0}: i \geq 1\}$, $N(T) \subset R^\infty(T)$ и $\overline{R(T)} = R(T)$, т.е. T – полурегулярный оператор, но область значений $R(T + S)$ незамкнута, поэтому оператор $T + S$ не является существенно полурегулярным.

Доказанное обобщение теоремы Като можно использовать для нахождения условий устойчивости различных существенных спектров при коммутирующих возмущениях.

Литература

1. Е р о в е н к о В. А. Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов. Мн., 2002.
2. Müller V. // J. Oper. Theory. 1994. Vol. 31. P. 363–380.
3. Kaashoek M.A. // Indag. Math. 1965. Vol. 27, № 3. P. 452–466.
4. Grabiner S. // J. Math. Soc. Japan 1982. Vol. 34, № 2. P. 317–337.
5. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
6. Harte R. Invertibility and singularity for bounded linear operators. N. Y., 1988.
7. Kordula V. // Proc. Roy. Irish Acad. 1996. Vol. 96A, № 1. P. 105–109.
8. Kordula V., Müller V. // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 10. P. 3055–3061.
9. Kordula V., Müller V., Rakočević V. // Studia Math. 1997. Vol. 123, № 1. P. 1–13.
10. Zemanek J. // Bull. Polish Acad. Sc. 1984. Vol. 32, № 1–2. P. 67–76.

Summary

Properties of stability of bounded essentially semiregular operators in Banach space as generalisations of semi-Fredholm operators are discussed. This paper is devoted the proof of generalisation of the theorem of Kato for essentially semiregular operators at commuting perturbations.

Обсуждаются свойства устойчивости ограниченных существенно полурегулярных операторов в банаховом пространстве как обобщений полуфредгольмовых операторов. Работа посвящена доказательству обобщения теоремы Като для существенно полурегулярных операторов при коммутирующих возмущениях.

УДК 517.984

Е р о в е н к о В. А. , М а р т о н М. В. **Обобщение теоремы Като об устойчивости на существенно полурегулярные операторы** // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2008. Т. 53, № 4. С. 18–22.

Рассмотрены свойства существенно полурегулярных ограниченных операторов в банаховом пространстве, занимающих промежуточное положение между нормально разрешимыми и полуфредгольмовыми операторами. Получена характеристика для возмущающих операторов, при которых сохраняется свойство существенной полурегулярности оператора, с помощью которой можно обобщить теорему Като об устойчивости полуфредгольмовых операторов при компактных возмущениях.

Библиогр. – 10 назв.